

# Tropisk geometri og firlegemeproblemet

Henrik Lunding Nielsen

5. januar 2015



# Relative ækvilibria

Beskriv bevægelsen ved  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

# Relative ækvilibria

Beskriv bevægelsen ved  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

# Relative ækvilibria

Beskriv bevægelsen ved  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Notation:  $Q_z = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \in SO(2)$ .

# Relative ækvilibria

Beskriv bevægelsen ved  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Notation:  $Q_z = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \in SO(2)$ .

For  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  beskriver  $f(t) = Q_{\alpha t} \mathbf{x}$  en cirkelbevægelse m. vinkelhastighed  $\alpha$ .

# Relative ækvilibria

Beskriv bevægelsen ved  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : [0, a[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Notation:  $Q_z = \begin{pmatrix} \cos(z) & -\sin(z) \\ \sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix} \in SO(2)$ .

For  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  beskriver  $f(t) = Q_{\alpha t} \mathbf{x}$  en cirkelbevægelse m. vinkelhastighed  $\alpha$ .

Lad os beskrive et system der opfylder begge dele!

# Relative ækvilibria

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

## Definition

For  $n \geq 2$  lad  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  med masser  $m_1, \dots, m_n > 0$  være en løsning til (1) på hele  $\mathbb{R}$ . Disse kalder vi et relativt ækvilibrium (med centrum i origo) hvis der findes et  $\alpha \in \mathbb{R}$  så:

$$\mathbf{y}_i(t) = Q_{\alpha t} \mathbf{y}_i(0) \quad \text{for alle } t \text{ og } i = 1, \dots, n \quad (2)$$

# Relative ækvilibria

Newtons tyngdelov:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

## Definition

For  $n \geq 2$  lad  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  med masser  $m_1, \dots, m_n > 0$  være en løsning til (1) på hele  $\mathbb{R}$ . Disse kalder vi et relativt ækvilibrium (med centrum i origo) hvis der findes et  $\alpha \in \mathbb{R}$  så:

$$\mathbf{y}_i(t) = Q_{\alpha t} \mathbf{y}_i(0) \quad \text{for alle } t \text{ og } i = 1, \dots, n \quad (2)$$

Ved differentiation fås  $\ddot{\mathbf{y}}_i(t) = -\alpha^2 Q_{\alpha t} \mathbf{y}_i(0) = -\alpha^2 \mathbf{y}_i(t)$ .



# Centrale konfigurationer

Så gælder:

$$-\alpha^2 \mathbf{y}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

# Centrale konfigurationer

Så gælder:

$$-\alpha^2 \mathbf{y}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

## Definition

En konfiguration i  $\mathbb{R}^d$  med punktmasser  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  kaldes en central konfiguration hvis der findes et  $\lambda > 0$  sådan at:

$$-\lambda \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

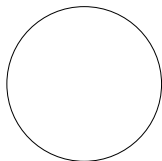
Vi kalder  $\lambda$  for den centrale konfigurations kvadrerede vinkelhastighed.

# Centrale konfigurationer

Givet nogle masser vil vi: Undersøge antallet af plane centrale konfigurationer (op til rotation, translation, skalering).

# Centrale konfigurationer

Givet nogle masser vil vi: Undersøge antallet af plane centrale konfigurationer (op til rotation, translation, skalering).



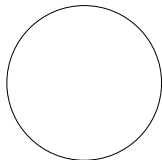
Klasser af plane centrale konfigurationer

# Albouy-Chenciners ligninger

Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} \left( r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2 \right) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$



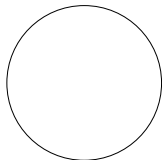
Klasser af plane centrale  
konfigurationer

# Albouy-Chenciners ligninger

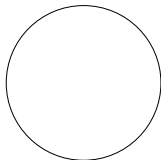
Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

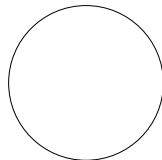
$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$



Klasser af plane centrale  
konfigurationer



Plane centrale kon-  
figurationer med  $\lambda=m$



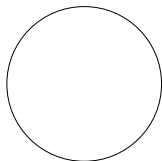
Løsninger til de  
normerede AC-ligninger

# Albouy-Chenciners ligninger

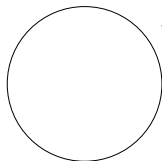
Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

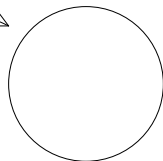
$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$



Klasser af plane centrale konfigurationer



Plane centrale konfigurationer med  $\lambda=m$



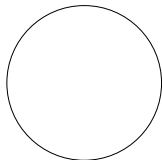
Løsninger til de normerede AC-ligninger

# Albouy-Chenciners ligninger

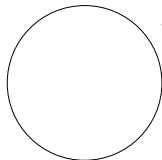
Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

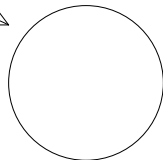
$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$



Klasser af plane centrale  
konfigurationer



Plane normerede  
konfigurationer



Løsninger til de  
normerede AC-ligninger

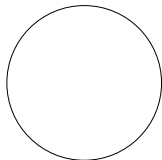


# Albouy-Chenciners ligninger

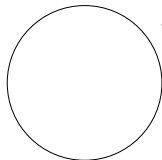
Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

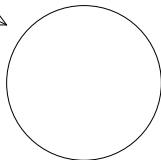
$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$



Klasser af plane centrale  
konfigurationer



Klasser af plane  
normerede konfigurationer



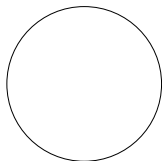
Løsninger til de  
normerede AC-ligninger

# Albouy-Chenciners ligninger

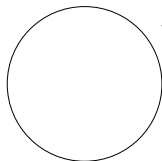
Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} \left( r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2 \right) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$

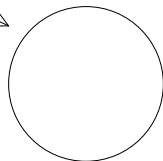


Klasser af plane centrale  
konfigurationer



Klasser af plane  
normerede konfigurationer

injektiv



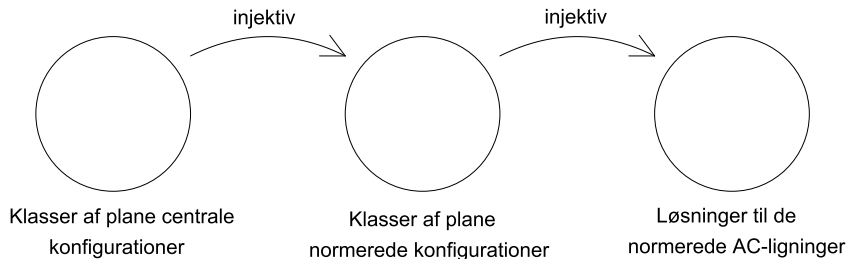
Løsninger til de  
normerede AC-ligninger

# Albouy-Chenciners ligninger

Albouy-Chenciners normerede ligninger:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1.$$

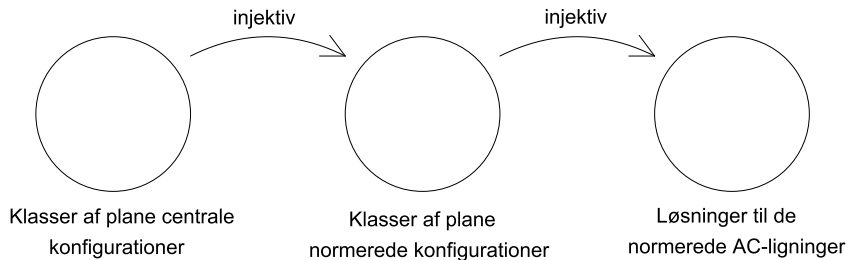


# Varietet af et ideal

## Definition

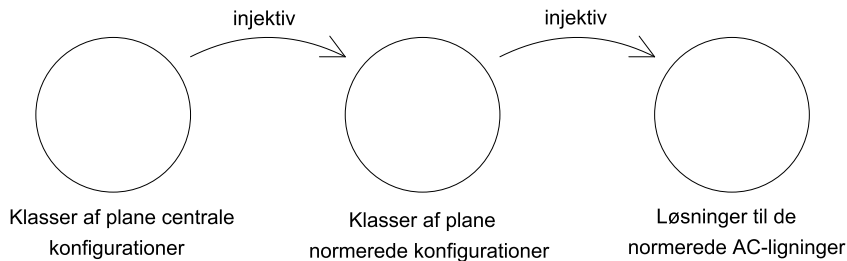
For et legeme  $k$  lad  $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_p]$  være et ideal. Så kaldes  $V(I)$  for varietetet til  $I$  og er givet ved:

$$V(I) = \{a \in k^P : f(a) = 0 \forall f \in I\}$$



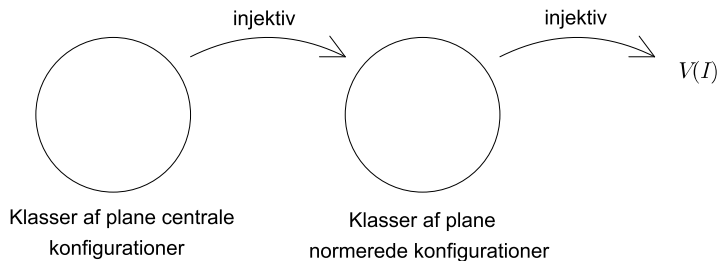
# Varietet af et ideal

Lad  $I \subset \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  være idealet frembragt af Albouy-Chenciners polynomier.



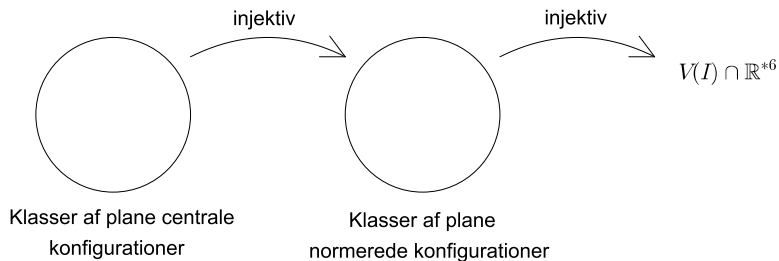
# Varietet af et ideal

Lad  $I \subset \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  være idealet frembragt af Albouy-Chenciners polynomier.



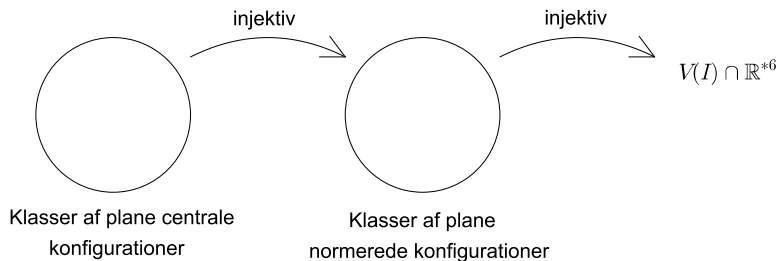
# Varietet af et ideal

Lad  $I \subset \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  være idealet frembragt af Albouy-Chenciners polynomier.



# Varietet af et ideal

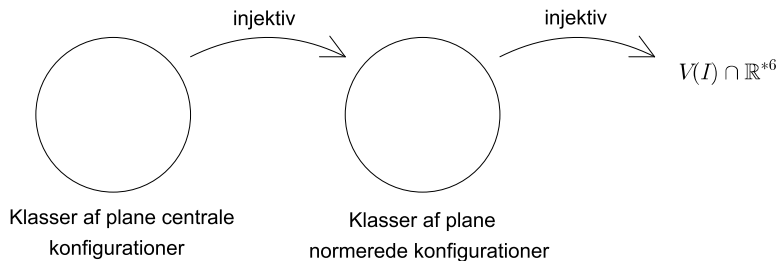
Vi vil vise at  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$  er endelig.





# Varietet af et ideal

Vi vil vise at  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$  er endelig.  
 For svært! Vi har brug for flere betingelser...



# Dziobeks ligninger

For plane, ikke-kollineære centrale konfigurationer med fire punktmasser gælder Dziobeks ligninger:

$$S_{12}S_{34} = S_{14}S_{32} = S_{13}S_{24}$$

# Dziobeks ligninger

For plane, ikke-kollineære centrale konfigurationer med fire punktmasser gælder Dziobeks ligninger:

$$S_{12}S_{34} = S_{14}S_{32} = S_{13}S_{24}$$

Hvis  $I \subset \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  er idealet frembragt af Albouy-Chenciners polynomier og Dziobeks polynomier vil vi vise at  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$  er endelig.

# Tropisk geometri

## Definition

For et polynomie  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$  defineres den tropiske hyperflade,  $T(f)$ , ved:

$$T(f) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \text{ er ikke et monomie}\}$$

Et snit af endeligt mange hyperflader,  $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n)$ , kaldes for en tropisk prevarietet.

For et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$  er den tropiske varietet givet ved:

$$T(I) = \bigcap_{f \in I \setminus \{0\}} T(f)$$

$\text{in}_{\mathbf{a}}(f)$  er summen af de led i  $f$  med størst  $\mathbf{a}$ -grad.

# Tropisk geometri

Vi vil vise at  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$  er endelig.

# Tropisk geometri

Vi vil vise at  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$  er endelig.

## Proposition

Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $T(I) \subset \{0\}$  så gælder at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$ .

# Tropisk geometri

$$T(I) \subset \{0\}$$

Vi vil vise at  ~~$V(I) \cap \mathbb{R}^{*n}$~~  er endelig.

## Proposition

Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $T(I) \subset \{0\}$  så gælder at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$ .

# Tropisk geometri

$$T(I) \subset \{0\}$$

Vi vil vise at  ~~$V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$~~  er endelig.

## Proposition

Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $T(I) \subset \{0\}$  så gælder at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$ .

$$T(I) \subset T(f_1) \cap \dots \cap T(f_{21})$$



# Tropisk geometri

$$T(I) \subset \{0\}$$

Vi vil vise at  ~~$V(I) \cap \mathbb{R}^{*6}$~~  er endelig.

## Proposition

Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $T(I) \subset \{0\}$  så gælder at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$ .

$$T(I) \subset T(f_1) \cap \dots \cap T(f_{21})$$

$f_1, f_2, \dots, f_{21}$  frembringerne i  $I$ .

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P$

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$

For  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  vil vi vise at  $P^0 \cap T(I) = \emptyset$ .

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$

For  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  og  $\mathbf{a} \in P^0$  vil vi vise at der findes et  $h \in I$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(h)$  er et monomie.

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$

For  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  vil vi vise at  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_n) \rangle$  indeholder et monomie for alle  $\mathbf{a} \in P^0$ . For så findes et  $h \in I$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(h)$  er et monomie.



# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$
- For alle  $P \in \Sigma$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0$  gælder:

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_i) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f_i) \quad \text{for alle } i = 1, \dots, n$$

For  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  vil vi vise at  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$  indeholder et monomie for alle  $\mathbf{a} \in P^0$ . For så findes et  $h \in I$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(h)$  er et monomie.

# Polyhedral geometri

- En polyhedralkegle er et snit af endeligt mange lukkede halvrum.
- En polyhedralvifte er en mængde af kegler der opfylder en række betingelser.

## Proposition

Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Så findes en polyhedralvifte  $\Sigma$  så:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$
- For alle  $P \in \Sigma$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0$  gælder:

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_i) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f_i) \quad \text{for alle } i = 1, \dots, n$$

For  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  vil vi vise at  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_n) \rangle$  indeholder et monomie for alle  $\mathbf{a} \in P^0$ . For så findes et  $h \in I$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(h)$  er et monomie.

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2) \rangle$

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_2) = m_4 r_{12}^3 r_{13} r_{14}^5 r_{23}^3 + m_2 r_{13} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{34}^3$$

Lad  $p_2 = r_{13} r_{14}^3 r_{23}^3$

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_2) = m_4 r_{12}^3 r_{13} r_{14}^5 r_{23}^3 + m_2 r_{13} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{34}^3$$

Lad  $p_2 = r_{13} r_{14}^3 r_{23}^3$  og vælg  $h_2$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f_2) = p_2 h_2$ .

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  ~~$\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$~~   
 $\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle$

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$

~~$$\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle$$~~

$$(\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle : (r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34})^\infty)$$



# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$

~~$$\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle$$~~

$$(\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle : (r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34})^\infty)$$

Med *Singular* ser vi at  $m_1 + m_2$  er indeholdt i dette ideal.

# Beregninger med Gfan og Singular

Med *Gfan* kan vi finde  $\Sigma$ . En kegle  $P$  herfra er strålen i retningen af  $\mathbf{a} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$ .

Vil finde et monomie i  ~~$\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$~~

~~$$\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle$$~~

$$(\langle h_1, h_2, \dots, h_{21} \rangle : (r_{12}r_{13}r_{14}r_{23}r_{24}r_{34})^\infty)$$

Med *Singular* ser vi at  $m_1 + m_2$  er indeholdt i dette ideal.

Så  $P^0 \cap T(I) = \emptyset$ , uanset hvad masserne er...

# Beregninger med Gfan og Singular

Men i  $\Sigma$  findes 102 kegler...

# Beregninger med Gfan og Singular

Men i  $\Sigma$  findes 102 kegler...

- Keglerne er inddelt i baner. Hvis kvotientidealet til én kegle indholder en positiv sum af masser, gør kvotientidealet til de andre kegler i banen også.

# Beregninger med Gfan og Singular

Men i  $\Sigma$  findes 102 kegler...

- Keglerne er inddelt i baner. Hvis kvotientidealet til én kegle indholder en positiv sum af masser, gør kvotientidealet til de andre kegler i banen også.
- Vi behøver kun tjekke kegler der snitter ikke-tomt med halvplanet  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : \mathbf{x} \cdot (1, 1, 1, 1, 1, 1) > 0\}$ .

## Beregninger med Gfan og Singular

$$\begin{array}{c}
 \text{cone}(\mathbf{s}_0), \text{ cone}(\mathbf{s}_1), \text{ cone}(\mathbf{s}_5), \text{ cone}(\mathbf{s}_8), \\
 \text{cone}(\mathbf{s}_{20}), \text{ cone}(\mathbf{s}_{23}), \text{ cone}(\mathbf{s}_{27}), \text{ cone}(\mathbf{s}_{31}), \text{ cone}(\mathbf{s}_{35}) \\
 \hline
 \text{cone}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1), \text{ cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8), \text{ cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{27}), \text{ cone}(\mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27}), \\
 \text{cone}(\mathbf{s}_{27}, \mathbf{s}_{31}), \text{ cone}(\mathbf{s}_5, \mathbf{s}_{35}), \text{ cone}(\mathbf{s}_{20}, \mathbf{s}_{35}) \\
 \hline
 \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27})
 \end{array}$$

Her er  $\mathbf{s}_i$ 'erne strålerne givet ved:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{s}_0 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1) & \mathbf{s}_1 = (-1, -1, 0, -1, 0, 0) \\
 \mathbf{s}_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0) & \mathbf{s}_8 = (-2, -2, 0, -2, 1, 1) \\
 \mathbf{s}_{20} = (0, 1, 1, 1, 1, 0) & \mathbf{s}_{23} = (0, 0, 0, 1, 1, 1) \\
 \mathbf{s}_{27} = (-2, -2, 1, -2, 1, 1) & \mathbf{s}_{31} = (0, 0, 1, 0, 1, 1) \\
 \mathbf{s}_{35} = (0, 2, 3, 3, 2, 0) &
 \end{array}$$

## Beregninger med Gfan og Singular

$$\begin{array}{cccccc}
 \cancel{\text{cone}(s_0)}, & \cancel{\text{cone}(s_1)}, & \text{cone}(s_5), & \cancel{\text{cone}(s_8)}, & & \\
 \text{cone}(s_{20}), & \text{cone}(s_{23}), & \cancel{\text{cone}(s_{27})}, & \text{cone}(s_{31}), & \text{cone}(s_{35}) & \\
 \hline
 \cancel{\text{cone}(s_0, s_1)}, & \cancel{\text{cone}(s_1, s_8)}, & \cancel{\text{cone}(s_1, s_{27})}, & \cancel{\text{cone}(s_8, s_{27})}, & & \\
 \text{cone}(s_{27}, s_{31}), & \text{cone}(s_5, s_{35}), & \text{cone}(s_{20}, s_{35}) & & & \\
 \hline
 \cancel{\text{cone}(s_1, s_8, s_{27})} & & & & & 
 \end{array}$$

Her er  $s_i$ 'erne strålerne givet ved:

$$s_0 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1)$$

$$s_1 = (-1, -1, 0, -1, 0, 0)$$

$$s_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

$$s_8 = (-2, -2, 0, -2, 1, 1)$$

$$s_{20} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$$s_{23} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$s_{27} = (-2, -2, 1, -2, 1, 1)$$

$$s_{31} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

$$s_{35} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$$

## Beregninger med Gfan og Singular

$$\begin{array}{c}
 \cancel{\text{cone}(s_0)}, \quad \cancel{\text{cone}(s_1)}, \quad \text{cone}(s_5), \quad \cancel{\text{cone}(s_8)}, \\
 \text{cone}(s_{20}), \quad \cancel{\text{cone}(s_{23})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_{27})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_{31})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_{35})} \\
 \hline
 \cancel{\text{cone}(s_0, s_1)}, \quad \cancel{\text{cone}(s_1, s_8)}, \quad \cancel{\text{cone}(s_1, s_{27})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_8, s_{27})}, \\
 \cancel{\text{cone}(s_{27}, s_{31})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_5, s_{35})}, \quad \cancel{\text{cone}(s_{20}, s_{35})} \\
 \hline
 \cancel{\text{cone}(s_1, s_8, s_{27})}
 \end{array}$$

Her er  $s_i$ 'erne strålerne givet ved:

$$s_0 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1)$$

$$s_1 = (-1, -1, 0, -1, 0, 0)$$

$$s_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$$

$$s_8 = (-2, -2, 0, -2, 1, 1)$$

$$s_{20} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$$

$$s_{23} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$s_{27} = (-2, -2, 1, -2, 1, 1)$$

$$s_{31} = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

$$s_{35} = (0, 2, 3, 3, 2, 0)$$



# To svære kegler...

Tilbage er strålerne i retning af  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$  og  $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$  (og deres baner).

# To svære kegler...

Tilbage er strålerne i retning af  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$  og  $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$  (og deres baner).

I kvotientidealet til  $\text{cone}(\mathbf{a})$  findes  $m_2 m_3 - m_1 m_4$ . Så førnævnte metode virker ikke.

# To svære kegler...

Tilbage er strålerne i retning af  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$  og  $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$  (og deres baner).

I kvotientidealet til  $\text{cone}(\mathbf{a})$  findes  $m_2 m_3 - m_1 m_4$ . Så førnævnte metode virker ikke. Hampton og Moeckel [2004] får fjernet keglerne i denne bane ved hjælp af Puiseuxrækker...

Ligeledes for  $\text{cone}(\mathbf{b})$ .

# To svære kegler...

Tilbage er strålerne i retning af  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$  og  $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$  (og deres baner).

I kvotientidealet til  $\text{cone}(\mathbf{a})$  findes  $m_2 m_3 - m_1 m_4$ . Så førnævnte metode virker ikke. Hampton og Moeckel [2004] får fjernet keglerne i denne bane ved hjælp af Puiseuxrækker...

Ligeledes for  $\text{cone}(\mathbf{b})$ .

Dette giver os at  $T(I) \subset \{0\}$ .