

# Tropisk geometri og firlegemeproblemet

Tropical geometry and the four body problem

Henrik Lunding Nielsen  
20081795

1. december 2014

Vejleder: Niels Lauritzen  
Projektvejleder: Anders Nedergaard Jensen



INSTITUT FOR MATEMATISKE FAG, AARHUS UNIVERSITET

## Resumé

Vi vil forsøge at vise endeligheden af relative ækvilibria i firlegemeproblemet. Vores fremgangsmåde minder meget om [6], men vi benytter i stedet sproget fra polyhedral- og tropisk geometri. For at vise endeligheden skal det vises, at hver af en række polyhedralkegler snittet med den tropiske varietet for et ideal er tomt. Dette ideal er frembragt af polynomier som vi får fra Albouy-Chenciners og Dziobeks ligninger. Vi viser dette for alle kegler undtagen to.

Først beskrives centrale konfigurationer og relative ækvilibria præcist. Herefter udleder vi Albouy-Chenciners ligninger og ser sammenhængen mellem disse og centrale konfigurationer. Senere beskrives teori fra polyhedral- og tropisk geometri, som til sidst bruges til at vise endeligheden af relative ækvilibria under antagelsen at de to ovennævnte kegler snittet med den tropiske varietet er tomt.

## Abstract

We try to show the finiteness of relative equilibria in the four body problem. Our approach is reminiscent to [6] but we use theory from polyhedral- and tropical geometry instead. To get the finiteness we must show that each of a number of polyhedral cones intersected with a tropical variety of a certain ideal is empty. This ideal is generated by polynomials we get from Albouy-Chenciners and Dziobeks equations. We show this for all cones except two.

First we give a precise description of central configurations and relative equilibria. Then we derive the Albouy-Chenciner equations, and see their connection with central configurations. We will describe some theory from polyhedral- and tropical geometry, and use it to show the finiteness of relative equilibria under the assumption that each of the two special cones mentioned above intersected with the tropical variety is empty.

## Tak til

Jeg vil gerne give en stor tak til Anders Nedergaard Jensen for al hans hjælp gennem dette forløb. Gennem de mange timer han har afsat har han tålmodigt, og altid i godt humør, afklaret en masse svært stof for mig. Min kæreste Maria Storgaard Hjorth skal også have tak for at læse korrektur, komme med forslag og ikke mindst for hendes forståelse, da arbejdet med dette speciale til tider har fyldt meget.

# Indhold

<b>1</b>	<b>Konfigurationer</b>	<b>1</b>
1.1	Centrale konfigurationer . . . . .	1
1.2	Relative ækvilibria . . . . .	3
1.3	Homotetisk kollaps . . . . .	6
1.4	Ækvivalente konfigurationer . . . . .	8
1.5	Overordnet strategi . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Albouy-Chenciners ligninger</b>	<b>11</b>
2.1	$\Omega$ er veldefineret . . . . .	12
2.2	$\Omega$ -billedmængden . . . . .	14
2.3	$\Omega$ er injektiv . . . . .	18
2.4	Skalering af normerede konfigurationer . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Flere betingelser</b>	<b>28</b>
3.1	Cayley-Menger determinanter . . . . .	28
3.2	Dziobeks ligninger . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Initielle termer, -idealer og kvotientidealer</b>	<b>34</b>
4.1	Initielle termer, -forme og -idealer . . . . .	35
4.2	Nogle resultater fra polyhedral geometri . . . . .	39
4.3	Tropisk geometri . . . . .	43
4.4	Kvotientidealer . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Undersøgelse af den tropiske varietet</b>	<b>54</b>
5.1	Symmetri for polynomier uden masser . . . . .	54
5.2	Symmetri for polynomier med masser . . . . .	57
5.3	Tjek at led ikke forsvinder . . . . .	59
5.4	Den tropiske prevarietet for frembringerne . . . . .	59
5.5	Kegler i $H_{-\mathbf{L}}^<$ . . . . .	60
5.6	Kegler i $H_{\mathbf{L}}^<$ . . . . .	62
5.7	De svære kegler . . . . .	62
5.8	Sammenligning af tropiske prevarieteter . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Litteratur</b>	<b>66</b>

<b>A</b>	<b>Appendix: Liste over egne bidrag</b>	<b>67</b>
<b>B</b>	<b>Appendix: Diverse software</b>	<b>68</b>
	B.1 Sæt variabler udenfor parentes . . . . .	68
	B.2 Find initielle former . . . . .	68
	B.3 Script til Singular . . . . .	69
<b>C</b>	<b>Appendix: Gfan's beregning af prevarietet</b>	<b>70</b>

# 1 Konfigurationer

I klassisk mekanik kan  $n$ -legemeproblemet beskrives som følgende opgave:

*Lad der være givet et Newtoniansk system med  $n$  punktmasser med bestemte masser, koordinater og starthastigheder. Beskriv punktmassernes fremtidige bevægelser.*

Alle punktmasser påvirker hinanden indbyrdes, så problemet bliver hurtigt mere kompliceret når  $n$  stiger. Vi vil se nærmere på en type af systemer, som giver simple løsninger til ovennævnte problem. For fire givne masser ønsker vi at vise, at der kun findes endeligt mange af disse systemer (med  $n = 4$ ), op til translation, rotation og skalering.

I kapitel 1.1 og 1.2, som er baseret på Marshal Hamptons og Richard Moeckels artikel [6], vil vi bl.a. definere disse systemer, som kaldes *relative ækvilibria*, og vise nogle sammenhænge. Når disse er på plads vil vi i afsnit 1.5 skitsere hvordan vi vil bruge Albouy-Chenciners ligninger samt tropisk geometri til at finde frem til ovennævnte endelighed.

Appendix A indeholder en liste over resultater og sætninger indeholdt i dette speciale, som ikke er hentet fra litteraturen. Disse er i stedet vist af undertegnede.

## 1.1 Centrale konfigurationer

Lad os starte med en definition: Lad der være givet  $n$  punktmasser arrangeret i  $\mathbb{R}^d$  med positive masser  $m_1, \dots, m_n$  og koordinater  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  (vi bruger fede variable til at repræsentere søjlevektorer). Disse kalder vi en konfiguration, og skriver den kort  $(X, \mathbf{M})$  hvor<sup>1</sup>:

$$X = \begin{pmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \\ | & | & \dots & | \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{d \times n}(\mathbb{R}), \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{>0}^n$$

Vi benytter  $r_{ij}$  for afstanden mellem punkter,  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$  for  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Følgende er den overordnede type af konfigurationer vi vil beskæftige os med:

---

<sup>1</sup>Her er  $\mathbb{R}_{>0} = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$ .

**Definition 1.1.** Lad  $(X, \mathbf{M})$  i  $\mathbb{R}^d$  være en konfiguration med  $n$  punktmasser. Dette kaldes en central konfiguration hvis der findes et  $\lambda > 0$  og et  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$  sådan at:

$$-\lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Vi kalder  $\lambda$  for den centrale konfigurations kvadrerede vinkelhastighed og  $\mathbf{c}$  for dens centrum.

For dem der har læst [6] bemærkes at  $\lambda$  i denne definition er anderledes med et fortegn. For et system af punktmasser i bevægelse er det at være en central konfiguration en instantiel egenskab: Systemets punkter kan være en central konfiguration til et tidspunkt, og ikke være det det næste. Det kan derfor virke underligt at kalde  $\lambda$  for den kvadrerede vinkelhastighed, men proposition 1.4 vil forsvare dette navn.

Hvis vi for  $i = 1, \dots, n$  multiplicerer  $i$ 'te ligning i (1) med  $m_i$  og til sidst summer alle sammen får vi:

$$\sum_{1 \leq i \leq n} -\lambda m_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = \sum_{\substack{1 \leq j, i \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3}$$

Det ses at højresiden evaluerer til  $\mathbf{0}$ , dvs.  $\mathbf{0} = \sum_i m_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = \sum_i m_i \mathbf{x}_i - (\sum_i m_i) \mathbf{c}$ , så vi får at  $\mathbf{c} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{m}$  hvis vi skriver  $m = m_1 + \dots + m_n$  for den totale masse. Så en ækvivalent definition for at være en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda$  er:

$$-\lambda \left( \mathbf{x}_i - \frac{\sum_j m_j \mathbf{x}_j}{m} \right) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

**Eksempel 1.2.** Betragt kanterne i et kvadrat:

$$\mathbf{x}_1 = (-1, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (1, 0), \quad \mathbf{x}_4 = (0, -1)$$

Giv alle disse punkter massen  $m = 1$ . Vi tjekker nu at dette er en central konfiguration med  $\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$  og  $\mathbf{c} = (0, 0)$ . Vi ser at (1) gælder for  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\sqrt{2}^3} + \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{2^3} + \frac{\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1}{\sqrt{2}^3} &= \frac{(1, 1)}{2\sqrt{2}} + \frac{(2, 0)}{8} + \frac{(1, -1)}{2\sqrt{2}} \\ &= \dots = - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

Pga. symmetri gælder det samme for  $i = 2, 3, 4$ , så de fire punktmasser er en central konfiguration.

## 1.2 Relative ækvilibria

I dette afsnit bruger vi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  til at repræsentere punkter og  $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  til at repræsentere bevægelse gennem tiden. Men lad os allerførst opskrive Newtons tyngdelov, som punktmasserne aflyder under deres bevægelse:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

(Vi har valgt et enhedssæt så gravitationskonstanten bliver 1). Det bemærkes at  $r_{ij}$  her ses som afbildninger,  $r_{ij}(t) = \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|$ .

**Definition 1.3.** For  $n \geq 2$  lad  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  med masser  $m_1, \dots, m_n > 0$  være en løsning til (3) på hele  $\mathbb{R}$ . Disse kalder vi et relativt ækvilibrium hvis der findes et  $\alpha \in \mathbb{R}$  og et  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$  sådan at:

$$\mathbf{y}_i(t) = Q_{\alpha t}(\mathbf{y}_i(0) - \mathbf{c}) + \mathbf{c} \quad \text{for alle } t \text{ og } i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Her er  $Q_{\alpha t} \in \text{SO}(2)$  rotationsmatricen der roterer  $\alpha t$  mod uret.  $\alpha$  kaldes vinkelhastigheden og  $\mathbf{c}$  kaldes centrum for det relative ækvilibrium.

For simpelhedens skyld antages i følgende proposition at alle centre er i origo,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ . Propositionen fortæller os at et relativt ækvilibrium til tiden  $t = 0$  udgør en central konfiguration, og at begreberne ‘centrum’ og ‘vinkelhastighed’ i de to definitioner stemmer overens.

**Proposition 1.4.** Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration i  $\mathbb{R}^2$  bestående af punktmasserne  $(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$ ,  $n \geq 2$ . Hvis to af følgende punkter er opfyldt, er alle punkterne opfyldt:

1.  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda > 0$ .
2. Der findes  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  som (sammen med masserne  $m_1, \dots, m_n$ ) er et relativt ækvilibrium med centrum  $\mathbf{0}$  og vinkelhastighed  $\alpha \neq 0$ , som opfylder  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{x}_i$  for alle  $i$ .
3.  $\lambda = \alpha^2$

Lad os bruge dette i et eksempel inden vi beviser det.



**Eksempel 1.5.** Vi så i eksempel 1.2 at  $\mathbf{x}_1 = (-1, 0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ ,  $\mathbf{x}_3 = (1, 0)$ ,  $\mathbf{x}_4 = (0, -1)$  hver med massen 1 udgør en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Når vi lader  $\alpha \in \{\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$  ved vi punkt 1 og 3 i forrige proposition. Vi ved derfor punkt 2, dvs. der findes et relativt ækvilibrium med fire punktmasser,  $\mathbf{y}_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , sådan at disse til tiden  $t = 0$  ligger ligesom den centrale konfiguration, dvs.  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{x}_i$  for  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Vi ser også at der kun findes to relative ækvilibria med denne egenskab - en med vinkelhastighed  $\sqrt{\lambda}$  og en med vinkelhastighed  $-\sqrt{\lambda}$ . Hvis der fandtes et tredje relativt ækvilibrium ville den have en vinkelhastighed  $\alpha \notin \{\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda}\}$ . Vi ville så have opfyldt punkt 1 og 2 i propositionen, og så ville punkt 3 give en modstrid.

Vi bemærker at  $\alpha \neq 0$  i propositionens andet punkt slet ikke er nogen begrænsning: Hvis der fandtes et relativt ækvilibrium med  $\alpha = 0$  ville alle dens punkter  $\mathbf{y}_i$  stå stille pr. (4). Dette betyder at ingen af dens punkter har en acceleration,  $\ddot{\mathbf{y}}_1 = \ddot{\mathbf{y}}_2 = \dots = \ddot{\mathbf{y}}_n = \mathbf{0}$ . Modstriden kommer nu af at vi vha. (3) finder<sup>2</sup> et punkt  $\mathbf{y}_i$  med  $\ddot{\mathbf{y}}_i \neq 0$ .

*Bevis.* Vi viser nu at punkt 1 og 2 medfører punkt 3, så antag at punkt 3 ikke er opfyldt, dvs.  $\alpha^2 \neq \lambda$ , og vælg  $i$  så  $\mathbf{x}_i$  ikke ligger i origo (denne må eksistere da vi ellers har to punkter oven i hinanden). Da masserne er positive får vi:

$$-m_i \alpha^2 Q_{at} \mathbf{x}_i \neq -m_i \lambda Q_{at} \mathbf{x}_i \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Vi benytter nu lemma 1.6. På venstresiden bruger vi (5) og på højresiden (7). Vi får:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i(t) \neq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|^3}$$

Så (3) er ikke opfyldt. Men dette giver modstriden, da (3) skal være opfyldt for alle relative ækvilibria.

Vi viser nu at punkt 1 og 3 medfører punkt 2. For alle  $i$  vælger vi  $\mathbf{y}_i(t) = Q_{at} \mathbf{x}_i$  hvorfra det følger at  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{x}_i$  og at (4) holder. Implikationen følger nu ved at vise at (3) også holder. Punkt 3 giver at  $-m_i \alpha^2 Q_{at} \mathbf{x}_i = -m_i \lambda Q_{at} \mathbf{x}_i$ .

---

<sup>2</sup>Vælg  $k$  så der findes to punktmasser med forskellig  $k$ -koordinat (denne må eksistere, ellers ville alle  $n$  punkter ligge oveni hinanden). Vælg  $i$  så  $\mathbf{y}_i$  har den laveste  $k$ -koordinat blandt alle  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ . Så vil leddene  $(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)$  alle have ikke-negativ  $k$ -koordinat, og heraf vil mindst én være positiv. Da alle masserne er positive bliver summens  $k$ -koordinat positiv, dvs.  $\ddot{\mathbf{y}}_i \neq 0$ .

Vi bruger så igen lemma 1.6, (5) på venstresiden og (7) på højresiden og får:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i(t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|^3} \quad \forall i$$

Dette viser (3).

Antag nu punkt 2 og 3 og lad os vise punkt 1. Vi ved så at (3) holder for det relative ækvilibrium:

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i(t) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|^3} \quad \forall i$$

Vi bruger endnu engang lemma 1.6. Ved at bruge (5) på venstresiden og (6) på højresiden får vi:

$$-m_i \alpha^2 Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j Q_{\alpha t} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3} \quad \forall i$$

Med punkt 3 ved vi at  $\alpha^2$  kan erstattes med  $\lambda$ . Hvis vi samtidig multiplicerer med  $\frac{1}{m_i} Q_{\alpha t}^{-1}$  på hver side får vi:

$$-\lambda \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3} \quad \forall i$$

Vi har hermed vist (1), så vi har vist punkt 1. □

**Lemma 1.6.** *Lad  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  være en konfiguration og lad  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  opfylde (4) for et  $\alpha$  og  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  (de behøver ikke opfylde (3)). Antag også at  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{x}_i$  for alle  $i$ . Så gælder for  $i = 1, \dots, n$ :*

$$m_i \ddot{\mathbf{y}}_i(t) = -m_i \alpha^2 Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j Q_{\alpha t} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|^3} \tag{6}$$

*Hvis desuden  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda > 0$  (og centrum  $\mathbf{0}$ ), så gælder også at:*

$$-m_i \lambda Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j (\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{\|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|^3} \tag{7}$$

*Bevis.* Ved at skrive (4) ud og bruge  $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{x}_i$  får vi for  $i = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{y}_i(t) = Q_{\alpha t} \mathbf{y}_i(0) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_i$$

Vi differentierer og får:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) &= \alpha \begin{bmatrix} -\sin(\alpha t) & -\cos(\alpha t) \\ \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \ddot{\mathbf{y}}_i(t) &= \alpha^2 \begin{bmatrix} -\cos(\alpha t) & \sin(\alpha t) \\ -\sin(\alpha t) & -\cos(\alpha t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ &= -\alpha^2 \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_i = -\alpha^2 Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i \end{aligned}$$

Vi multiplicerer med  $m_i$  på hver side og får (5). For alle  $i = 1, \dots, n$  og  $t \in \mathbb{R}$  får vi (pr. antagelser) at  $Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i = Q_{\alpha t} \mathbf{y}_i(0) = \mathbf{y}_i(t)$ , og da<sup>3</sup>  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|Q_{\alpha t}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\| = \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|$  må (6) gælde.

Hvis  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  er en central konfiguration ved vi også at (1) holder. For  $t \in \mathbb{R}$  ganger vi  $Q_{\alpha t} m_i$  på denne ligning:

$$-m_i \lambda Q_{\alpha t} \mathbf{x}_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{m_i m_j Q_{\alpha t}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^3} \quad \forall i$$

Vi bruger (6) på dette og får (7). □

### 1.3 Homotetisk kollaps

Udover relative ækvilibria er det også værd at kigge på homotetisk kollaps af systemer for at få større indsigt. Ved et homotetisk kollaps starter punktmasserne med starthastighed  $\mathbf{0}$  og bevæger sig mod massemidtpunktet, hvor de alle støder sammen til tiden  $s$ . Dette afsnit er baseret på [3].

**Definition 1.7.** *Lad der være givet et system af punktmasser  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  med masser  $m_1, \dots, m_n > 0$ . Hvis der findes et  $s \in \mathbb{R}$  og en afbildning  $\gamma : [0, s[ \rightarrow \mathbb{R}$  sådan at følgende er opfyldt, så siger vi at systemet kollapser homotetisk (med starthastighed  $\mathbf{0}$ ):*

- $\dot{\gamma}(0) = 0$  og  $\lim_{t \rightarrow s} \gamma(t) = 0$ .
- $\mathbf{y}_i(t) = \gamma(t) \mathbf{y}_i(0) + (1 - \gamma(t)) \mathbf{c}$  for alle  $i = 1, \dots, n$  og  $t \in [0, s[$ .

---

<sup>3</sup> $Q_{\alpha t}$  er en ortogonalmatrix og ændrer derfor ikke på længden af vektoren  $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$

- $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  er løsning til (3) på  $[0, s[$ .

Hvis i stedet  $\dot{\gamma}(0) < 0$ , ville systemet stadig kollapse i punktet  $\mathbf{c}$ , og ligeså hvis  $\dot{\gamma}(0)$  kun er lidt større end 0. Definitionen kan således udvides lidt, men i denne sammenhæng er den tilstrækkelig. Hvis  $\dot{\gamma}(0)$  er for stor er det dog ikke sikkert at systemet trækker sig sammen igen - det vil i stedet altid udvide sig (i så fald har vi ikke et homotetisk kollaps, men vi har stadig en homotetisk bevægelse).

Der gælder at hvis man 'slipper' en central konfiguration med starthastigheder  $\mathbf{0}$ , så vil punkterne kollapse homotetisk. For at se dette så lad først  $(\mathbf{x}_1, m_1), \dots, (\mathbf{x}_n, m_n)$  være den pågældende centrale konfiguration med centrum  $\mathbf{c}$  og kvadreret vinkelhastighed  $\lambda$  og betragt differentiaalligningen:

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{-\lambda}{(\gamma(t))^2}$$

Lad  $\gamma$  være løsningen med startbetingelser  $\gamma(0) = 1$  og  $\dot{\gamma}(0) = 0$  (så længe  $\gamma$  er positiv vil  $\ddot{\gamma}$  være negativ og dermed 'accelerere'  $\gamma$  mod 0).

Lad nu  $\mathbf{y}_i : [0, s[ \rightarrow \mathbb{R}^d$  ved  $\mathbf{y}_i(t) = \gamma(t)\mathbf{x}_i + (1 - \gamma(t))\mathbf{c}$ . Dette system er til  $t = 0$  netop den centrale konfiguration, og den har starthastighed  $\mathbf{0}$  for alle dens punkter. Ved at bruge (1) kan vi for  $t \in [0, s[$  skrive:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}}_i(t) &= \ddot{\gamma}(t)(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) = \frac{-\lambda}{(\gamma(t))^2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{c}) \\ &= \frac{1}{(\gamma(t))^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{(r_{ij})^3} \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\gamma(t)\mathbf{x}_j - \gamma(t)\mathbf{x}_i)}{(\gamma(t)r_{ij})^3} \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\gamma(t)\mathbf{x}_j + (1 - \gamma(t))\mathbf{c} - \gamma(t)\mathbf{x}_i - (1 - \gamma(t))\mathbf{c})}{(\gamma(t)r_{ij})^3} \\ &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t))}{(\gamma(t)r_{ij})^3} \end{aligned}$$

Her er  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ . Til alle  $t \in [0, s[$  har vi:

$$\gamma(t)r_{ij} = \|\gamma(t)\mathbf{x}_i - \gamma(t)\mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_j(t)\|$$

så punktmasserne  $(\mathbf{y}_1, m_1), \dots, (\mathbf{y}_n, m_n)$  opfylder (3) på  $[0, s[$ . Vi har nu vist punkterne i definitionen, så hvis en central konfiguration 'slippes' med starthastigheder  $\mathbf{0}$  vil punktmasserne kollapse homotetisk.

## 1.4 Ækvivalente konfigurationer

I dette afsnit lader vi  $L = (1, 1, \dots, 1)$  være rækkevektoren bestående af  $d$  1-taller. Vi indfører nu en ækvivalensrelation på mængden af konfigurationer. Vi siger at  $(X, \mathbf{M}) \sim (Y, \mathbf{M})$  hvis der findes en ortogonal matrix  $Q \in O(d)$  og et  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  så  $\mathbf{x}_i = Q\mathbf{y}_i + \mathbf{u}$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$ . Vi ser at dette faktisk er en ækvivalensrelation da den er:

- Refleksiv: For alle konfigurationer  $(X, \mathbf{M})$  skal  $(X, \mathbf{M}) \sim (X, \mathbf{M})$ . Vælg blot  $Q$  som identitetsmatricen og  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .
- Symmetrisk: Hvis  $(X, \mathbf{M}) \sim (Y, \mathbf{M})$  så skal  $(Y, \mathbf{M}) \sim (X, \mathbf{M})$ . Vi har at  $X = QY + \mathbf{u}L$ . Hvis vi kan finde  $Q'$  og  $\mathbf{u}'$  så  $Y = Q'X + \mathbf{u}'L$ , så gælder  $(Y, \mathbf{M}) \sim (X, \mathbf{M})$ . Vi vælger  $Q' = Q^T$  og  $\mathbf{u}' = -Q^T\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned} Q'X + \mathbf{u}'L &= Q^T(QY + \mathbf{u}L) - Q^T\mathbf{u}L \\ &= Q^TQY + Q^T\mathbf{u}L - Q^T\mathbf{u}L = Y \end{aligned}$$

$Q^TQ = \mathbb{1}$  da  $Q$  er ortogonal.

- Transitiv: Hvis  $(X, \mathbf{M}) \sim (Y, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M}) \sim (Z, \mathbf{M})$  så skal  $(X, \mathbf{M}) \sim (Z, \mathbf{M})$ . Vi kan skrive  $X = QY + \mathbf{u}L$  og  $Y = Q'Z + \mathbf{u}'L$ . Så må:

$$\begin{aligned} X &= QY + \mathbf{u}L = Q(Q'Z + \mathbf{u}'L) + \mathbf{u}L \\ &= QQ'Z + (Q\mathbf{u}' + \mathbf{u})L \end{aligned}$$

Et produkt af ortogonale matricer er igen en ortogonal matrix, så  $(X, \mathbf{M}) \sim (Z, \mathbf{M})$ .

Vi har altså at hvis to konfigurationer relaterer med translation, rotationer og/eller spejlninger, så er de ækvivalente. Ækvivalensklassen der indeholder alle ækvivalente konfigurationer til  $(X, \mathbf{M})$  skriver vi som  $[X, \mathbf{M}]$ . Sent i kapitel 2 laver vi nogle større ækvivalensklasser,  $[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$ . Her er konfigurationer der er forskellige med en skalering også ækvivalente.

Vi kommer til at se at hvis  $(X, \mathbf{M})$  er en central konfiguration og  $(X', \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]_{\equiv}$ , så er  $(X', \mathbf{M})$  også en central konfiguration. Og hver centrale konfiguration giver via proposition 1.4 to relative ækvilibria, ligesom i eksempel 1.5 - en hvor punktmasserne drejer mod uret og en hvor de drejer med uret.

Således giver  $[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$  uendeligt mange relative ækvilibria. Og alle dem der drejer med uret er til  $t = 0$  relateret med en translation, rotation og/eller skalering, og ligeså for alle der drejer mod uret. Så hvis vi anser alle disse for at være 'ens', giver en hel ækvivalensklasse  $[X, \mathbf{M}]$  kun to relative ækvilibria.

Dvs. hvis vi kan vise at der kun findes endeligt mange ækvivalensklasser  $[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$  af centrale konfigurationer, så findes der kun endeligt mange relative ækvilibria.

## 1.5 Overordnet strategi

Istedet for at tælle relative ækvilibria, kan vi tælle ækvivalensklasser af centrale konfigurationer. Lad os kalde mængden af disse klasser for  $C'$ . I næste kapitel vil vi finde en injektiv afbildning  $\Omega' : C' \rightarrow W$ , hvor  $W$  er løsningsmængden til de normerede Albouy-Chenciner-ligninger. Dette vil fortælle os at kardinaliteten af  $C'$  er mindre end den af  $W$ . Herefter kan vi prøve at vise at  $|W|$  er endelig, for så er  $|C'|$  også.

Hver af Albouy-Chenciners normerede ligning kan udtrykkes på formen  $f(r) = 0$ , som vil være opfyldt for løsninger  $r \in W$ . Det viser sig at disse udtryk kan multipliceres med andre passende udtryk for at lave dem til polynomier:

$$f_1, \dots, f_m \in \mathbb{R}[r_{ij} : 1 \leq i < j \leq n]$$

Disse kalder vi Albouy-Chenciners (normerede) polynomier. Vi får at et  $r \in W$  er rod i alle disse polynomier. Dette er ækvivalent med at  $r$  er rod i  $f$  for alle  $f$  i idealet  $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ .

**Definition 1.8.** For et legeme  $k$  lad  $I \subset k[x_1, x_2, \dots, x_p]$  være et ideal. Så kaldes  $V(I)$  for varieteteten til  $I$  og er givet ved:

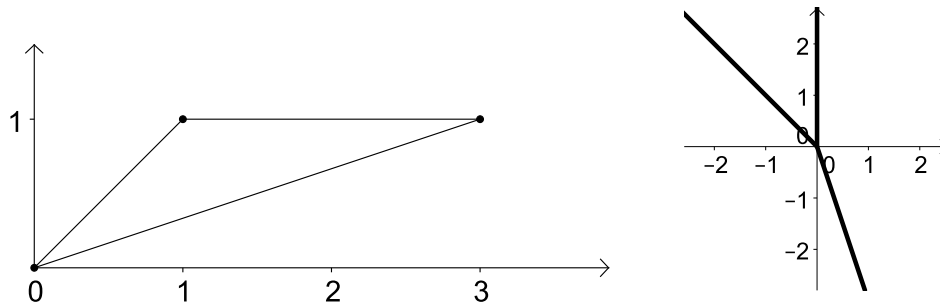
$$V(I) = \{a \in k^p : f(a) = 0 \forall f \in I\}$$

Vi kan nu udtrykke os således: Hvis  $r \in W$  så er  $r \in V(I)$ , dvs.  $W \subset V(I)$ . Hvis man kan vise at  $V(I)$  er endelig vil  $W$  således også være endelig.

Vi kunne i teorien finde en Gröbnerbasis for  $I$  hvilket ville være en stor hjælp til at finde  $V(I)$ , men dette tager for lang tid til at være muligt i praksis. Vi er dog kun interesseret i at vise at  $V(I)$  er endelig, så vi kan i stedet bruge en anden metode, der bygger på polyhedral- og tropisk geometri som beskrives i kapitel 4. Selve metoden præsenteres i kapitel 5. Definition 4.22 beskriver tropiske hyperflader og (pre)varieteter præcist, men vi giver nu en løs forklaring af hvad det er, for at se hvordan vi vil bruge dem:

For et polynomie  $g \in I$  betragtes hvilke eksponenter de forskellige led har. Hvis f.eks.  $g = 3x^3y + xy + 1$  så findes et led med  $x$ -eksponent 3 og  $y$ -eksponent 1. Derfor tegner vi punktet  $(3, 1)$  ind i et koordinatsystem. På samme måde tegnes punkterne  $(1, 1)$  og  $(0, 0)$  ind. Vi forbinder punkterne og får polynomiets såkaldte Newtonpolytop,  $NP(g)$  (se figur 1 til venstre).

Hvert hjørne i denne trekant repræsenterer et led i  $g$ . Vi kan nu snakke om hvilke led der er 'længst' i en bestemt retning. F.eks. har punktet  $(3, 1)$  størst  $x$ -koordinat af de tre, og  $(3, 1)$  er også længst i retningen af vektoren  $(1, 1)$  (dvs.  $(3, 1) \cdot (1, 1) > \mathbf{u} \cdot (1, 1)$  for  $\mathbf{u} = (0, 0), (1, 1)$ ). Men i nogle retninger findes der to punkter, som er lige store, f.eks. i retningen af  $(0, 1)$ . Disse retninger giver den tropiske hyperflade for  $g$  (figur 1 til højre), som vi kort skriver  $T(g)$ .



Figur 1: En Newtonpolytop med tilhørende tropiske hyperflade

For to polynomier  $g_1, g_2$  kan vi snitte deres (tropiske) hyperflader sammen, og hvis  $\mathbf{u} \in T(g_1) \cap T(g_2)$  findes der i hvert af de to Newtonpolytoper  $NP(g_1)$  og  $NP(g_2)$  mindst to hjørner som er 'længst i retning' af  $\mathbf{u}$ .

Lad os igen betragte frembringerne  $f_1, \dots, f_m$  i idealet  $I$  hvis varietet vi vil vise er endelig. Vi har:

$$T(f_1) \cap \dots \cap T(f_m) \supset \bigcap_{f \in I} T(f)$$

Et snit af endeligt mange hyperflader som på venstresiden kalder vi en tropisk prevarietet, og snittet til højre kaldes den tropiske varietet til  $I$ . Vi vil vise at nogle bestemte delmængder af venstresiden - nogle såkaldte polyhedralkegler (se definition 4.11) - ikke er indeholdt i højresiden, for så er højresiden blot  $\{0\}$  hvorefter proposition 4.36 giver at  $V(I) \cap \mathbb{C}^{*p}$  er endelig (når  $n = 4$  er der seks variabler, dvs.  $p = 6$ ). Lad os tage et skridt tilbage: Vi ved at to punktmasser ikke kan ligge oveni hinanden i et relativt ækvilibrium. Dvs.  $r_{ij} \neq 0$  for  $i \neq j$ . Derfor leder vi kun efter ikke-0 rødder, dvs. vi er netop kun ude efter at vise at  $V(I) \cap \mathbb{C}^{*p}$  er endelig.

Det skal siges at denne metode ikke er sikker: Vi vil faktisk se at det ikke lykkedes at vise at to særlige kegler fra venstresiden ikke er indeholdt i højresiden. I et forsøg på at reparere dette kan vi prøve at begrænse hvilke konfigurationer vi kigger på. Disse begrænsninger kommer ved at kræve at flere betingelser skal holde for konfigurationerne (f.eks. kan kræves at enhver konfiguration skal ligge i et plan). Disse ekstra betingelser skal kunne skrives som polynomiumsligninger som ovenstående, og tilføjes så som frembringerer til idealet. Kapitel 3 indeholder nogle eksempler på nogle flere betingelser (polynomier) man kunne inkludere, men disse hjælper desværre ikke på ovennævnte to kegler.

## 2 Albouy-Chenciners ligninger

I dette kapitel arbejder vi videre med [6]. Indtil kapitel 2.3 vil vi kun kigge på centrale konfigurationer hvis kvadrerede vinkelhastighed er lig dens totale masse (dvs.  $\lambda = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  i (1)). Vi vil fremover blot beskrive disse centrale konfigurationer som normerede konfigurationer.

Vi minder om ækvivalensklasserne på formen  $[X, \mathbf{M}]$  og  $[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$  som blev introduceret i kapitel 1.4. Vi vil se at hvis  $(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration så er alle  $(X', \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]$  det også. Derefter finder vi en injektiv afbildning  $\Omega$  som sender disse klasser af normerede konfigurationer ind i løsninger til de normerede Albouy-Chenciner-ligninger. I afsnit 2.4 laver vi en ny afbildning  $\Omega'$  baseret på  $\Omega$ . Vi viser at denne sender  $\equiv$ -klasser af centrale konfigurationer (på formen  $[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$ ) ind i løsninger til ovennævnte ligninger, og at den stadig er injektiv.

Gennem kapitlet har vi defineret rækkevektoren  $L = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ , og når vi betragter en konfiguration  $(X, \mathbf{M})$  med  $n$  punktmasser lader<sup>4</sup> vi  $m := m_1 + \dots + m_n = L\mathbf{M}$  være den totale masse for konfigurationen. For konfigurationen indfører vi også matricerne  $S, A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \begin{cases} \frac{1}{r_{ij}^3} - 1 & \text{hvis } i \neq j \\ 0 & \text{hvis } i = j \end{cases} \\ A_{ij} &= \begin{cases} m_i S_{ij} & \text{hvis } i \neq j \\ -\sum_{k \neq j} m_k S_{kj} & \text{hvis } i = j \end{cases} \\ B_{ij} &= -\frac{1}{2} r_{ij}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Med disse givet kan vi nu give et mere detaljeret overblik over, hvad der skal ske frem til kapitel 2.4:

- Lemma 2.3 fortæller os at  $C$  defineret således giver mening:

$$C = \{[X, \mathbf{M}] \mid (X, \mathbf{M}) \text{ er en normeret konfiguration}\} \quad (9)$$

Dvs. hvis  $(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration, så er ethvert  $(X', \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]$  også.

- Vi definerer afbildningen  $\Omega : C \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  ved:

$$\Omega : [X, \mathbf{M}] \mapsto r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup>Vi indfører nye variable ved kolon-lig ( $:=$ ).



hvor  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = r_{ji}$ . At denne afbildning er veldefineret følger af lemma 2.1 (efter vi har brugt lemma 2.3 til at vise at  $C$  er veldefineret).

- I kapitel 2.2 ser vi at matricer  $r$  fra  $\Omega$ 's billedmængde opfylder Albouy-Chenciners normerede usymmetriske ligninger. Disse ligninger er givet ved:

$$\sum_{k=1}^n m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (10)$$

Her er  $S_{ik}$  givet som i (8) (det er  $S_{ik}$  der gør ligningerne normeret. Ved de generelle (unormerede) ligninger ville  $S_{ik} = \frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{\lambda}{m}$  når  $i \neq k$ . Men da vi kun ser på normerede konfigurationer er  $\lambda = m$ ).

- Propositionen fra kapitel 2.3 fortæller at  $\Omega$  er injektiv.

Efter dette ved vi at kardinaliteten af  $C$  er mindre end kardinaliteten af løsningsmængden til (10). Når vi kommer til kapitel 2.4 vil vi først beskrive relationen  $\equiv$  præcist, og vise at dette er en ækvivalensrelation. Herefter vises, at hvis  $(X, \mathbf{M})$  er en central konfiguration, så er ethvert  $(X', \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]_{\equiv}$  også. Efter dette findes den injektive afbildning  $\Omega'$  som blev beskrevet først i kapitel 1.5. Dette bygger på ovenstående fire punkter, så lad os først vise disse.

## 2.1 $\Omega$ er veldefineret

**Lemma 2.1.** *Lad  $(Y, \mathbf{M}), (Z, \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]$ . Så gælder at de indbyrdes afstande mellem punktmasserne er de samme, altså:*

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| = \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\| \quad \text{for alle } 1 \leq i, j \leq n$$

*Bevis.* Lad  $1 \leq i, j \leq n$  være vilkårlige. Vi har  $(Y, \mathbf{M}) \sim (Z, \mathbf{M})$  og kan dermed skrive  $\mathbf{z}_i = Q\mathbf{y}_i + \mathbf{u}$  og  $\mathbf{z}_j = Q\mathbf{y}_j + \mathbf{u}$  for nogle  $Q \in O(d)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . Så gælder:

$$\|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\| = \|(Q\mathbf{y}_i + \mathbf{u}) - (Q\mathbf{y}_j + \mathbf{u})\| = \|Q(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|$$

Sidste lighed følger af at  $Q$  er en ortogonal matrix og derfor afstandsbevarende:

$$\begin{aligned} \|Q(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)\|^2 &= (Q(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j))^T Q(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \\ &= (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T (Q^T Q)(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) \\ &= (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j)^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

□

**Lemma 2.2.** Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration hvor  $A$  og  $S$  er givet som i (8). Følgende er ækvivalent:

- $(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration.
- $\sum_{j \neq i} m_j S_{ij}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- $XA = 0$ .

*Bevis.* Fra (2) ved vi at  $(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration hvis og kun hvis:

$$-m \left( \mathbf{x}_i - \frac{\sum_j m_j \mathbf{x}_j}{m} \right) = \sum_{j \neq i} \frac{m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

Vi vil nu substituere venstresiden med følgende:

$$\begin{aligned} -m \left( \mathbf{x}_i - \frac{\sum_j m_j \mathbf{x}_j}{m} \right) &= -m \left( \frac{\sum_j m_j \mathbf{x}_i}{m} - \frac{\sum_j m_j \mathbf{x}_j}{m} \right) \\ &= -\sum_j m_j \mathbf{x}_i + \sum_j m_j \mathbf{x}_j \\ &= \sum_{j \neq i} m_j (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

herved bliver (12) til følgende, efter lidt omskrivning:

$$\sum_{j \neq i} m_j \left( \frac{1}{r_{ij}^3} - 1 \right) (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (13)$$

Det ses at (12) er ækvivalent med (13) og dette viser at de første to punkter er ækvivalente. Vi viser nu at andet punkt er ækvivalent med  $XA = 0$ . Dette ser vi er opfyldt da venstresiderne i de  $n$  ligninger i punkt 2 hver er lig en søjle i  $XA$ . Lad os f.eks. regne på søjle  $i$  i  $XA$ :

$$\begin{aligned} (XA)_i &= \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_j A_{ji} + \mathbf{x}_i A_{ii} \\ &= \sum_{j \neq i} \mathbf{x}_j m_j S_{ji} - \mathbf{x}_i \sum_{j \neq i} m_j S_{ji} \\ &= \sum_{j \neq i} m_j S_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

Vi huskede her at  $S_{ij} = S_{ji}$ . □

**Lemma 2.3.** *Antag  $(X_1, \mathbf{M}) \sim (X_2, \mathbf{M})$ . Hvis  $(X_1, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration, så er  $(X_2, \mathbf{M})$  også.*

*Bevis.* Vi kan skrive  $X_2 = QX_1 + \mathbf{u}L$  for et  $Q \in O(d)$  og et  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . Lad  $A$  være matricen der svarer til  $(X_1, \mathbf{M})$  som i (8). Dette  $A$  afhænger kun af masserne, samt de indbyrdes afstande - men disse er de samme for  $(X_1, \mathbf{M})$  og  $(X_2, \mathbf{M})$  (se lemma 2.1), så  $A$  svarer også til  $(X_2, \mathbf{M})$ .

Ifølge forrige lemma ved vi at  $X_1A = 0$  og skal vise  $X_2A = 0$ :

$$X_2A = (QX_1 + \mathbf{u}L)A = Q(X_1A) + \mathbf{u}(LA) = 0 + 0 = 0$$

$LA = 0$  fordi summen af indgangene i enhver kolonne i  $A$  er 0.  $\square$

Vi har nu vist at  $C$  givet som i (9) giver mening, og at  $\Omega : C \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  er veldefineret.

## 2.2 $\Omega$ -billedmængden

Vi viser i dette afsnit at  $\Omega$  sender elementer i  $C$  over i løsninger til Albouy-Chenciners normerede usymmetriske ligninger, (14). Lad først  $P$  være de vektorer, hvis koordinater summer til 0:  $P = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_n = 0\}$ .

**Lemma 2.4.** *Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration, hvor  $A$  og  $B$  er givet som i (8). Så gælder for alle  $\mathbf{v} \in P$  at  $\mathbf{v}^T X^T X A = \mathbf{v}^T B A$ .*

*Bevis.* Skriv  $G := X^T X$  og lad  $\mathbf{v} \in P$  være givet. Tag et vilkårligt  $k = 1, \dots, n$  og lad  $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$  være vektoren med alle indgange 0, undtagen den  $k$ 'te som er 1. Lad så  $\mathbf{z} = A\mathbf{e}_k$ . Hver af  $A$ 's kolonner summer til 0, så  $\mathbf{z} \in P$ . Vi kan herunder se, at der kan lægges et vilkårligt  $p_i \in \mathbb{R}$  til alle indgange i  $G$ 's  $i$ 'te række og søjle, og  $\mathbf{v}^T G \mathbf{z}$  forbliver uændret:

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}^T \left( G + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ p_i & p_i & \dots & p_i \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & p_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_i & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{z} \\ &= \mathbf{v}^T G \mathbf{z} + \mathbf{v}^T \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{z}_j p_i \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} + [\dots \ 0 \ \sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{v}_j p_i \ 0 \ \dots] \mathbf{z} = \mathbf{v}^T G \mathbf{z} \end{aligned}$$

De to summer gav 0 da  $\mathbf{v}, \mathbf{z} \in P$ . Ved at bruge dette for alle  $i$  fås:

$$\mathbf{v}^T G \mathbf{z} = \mathbf{v}^T \left( G + \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & & & \vdots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \right) \mathbf{z}$$

Vi vælger  $p_i = -\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i\|^2$ . Ovenstående ligning er samme som  $\mathbf{v}^T G \mathbf{z} = \mathbf{v}^T B \mathbf{z}$  da der gælder:

$$\begin{aligned} B_{ij} &= -\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j - 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \\ &= \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j = G_{ij} - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i\|^2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_j\|^2 \end{aligned}$$

Så vi har vist at  $\mathbf{v}^T G A \mathbf{e}_k = \mathbf{v}^T B A \mathbf{e}_k$  for alle  $k = 1, \dots, n$ , dvs.  $\mathbf{v}^T X^T X A = \mathbf{v}^T G A = \mathbf{v}^T B A$ .  $\square$

**Lemma 2.5.** *Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration med  $\sum_i \frac{m_i}{m} \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$  (dvs. massemidtpunktet er i origo), og lad  $A$  og  $B$  være givet som i (8). Så gælder at  $X A = \mathbf{0}$  hvis og kun hvis  $\mathbf{v}^T B A = \mathbf{0}$  for alle  $\mathbf{v} \in P$ .*

*Bevis.* Hvis  $X A = \mathbf{0}$  gælder  $\mathbf{v}^T X^T X A = \mathbf{0}$  for alle  $\mathbf{v} \in P$ , og så giver forrige lemma at  $\mathbf{v}^T B A = \mathbf{0}$ .

Antag at  $\mathbf{v}^T B A = \mathbf{0}$  for alle  $\mathbf{v} \in P$ . Fra forrige lemma ved vi:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}^T X^T X A \quad \text{for alle } \mathbf{v} \in P$$

Da  $m \neq 0$  kan vi lade  $\mathbf{M}_N := \frac{\mathbf{M}}{m}$  være de 'normerede masser'. Lad så  $i \in \{1, \dots, n\}$  vilkårligt og lad  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i - \mathbf{M}_N$ . Det ses at  $L \mathbf{v} = L \mathbf{e}_i - L \mathbf{M}_N = 1 - \sum_j \frac{m_j}{m} = 0$  dvs.  $\mathbf{v} \in P$  og vi kan skrive:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}^T X^T X A = \mathbf{e}_i^T X^T X A - \mathbf{M}_N^T X^T X A = \mathbf{e}_i^T X^T X A$$

Sidste lighed følger af at  $\mathbf{M}_N^T X^T = (X \mathbf{M}_N)^T = \left( \sum_j \frac{m_j}{m} \mathbf{x}_j \right)^T = \mathbf{0}^T$ . Da dette gælder for alle  $i$  må  $X^T X A = \mathbf{0}$ .

Lad nu  $\mathbf{z} = A \mathbf{e}_i$  for en basisvektor  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ . Da  $X^T X \mathbf{z} = \mathbf{0}$  må  $X \mathbf{z}$  ligge i nulrummet til  $X^T$ . Underrumshovedsætningen (sætning 5.2.1 i [11]) giver dermed at  $X \mathbf{z}$  ligger i det ortogonale komplement til  $X$ 's kolonnerum. Det er klart at  $X \mathbf{z}$  også ligger i  $X$ 's kolonnerum. Snittet af et rum og dens ortogonale komplement er  $\{0\}$ , så  $X \mathbf{z} = \mathbf{0}$ . Vi har vist at  $X A \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$  for alle  $i$ , dvs.  $X A = \mathbf{0}$ .  $\square$

Vi kan nu endelig opskrive:

**Proposition 2.6.**

Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration og lad  $r \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  så  $r$  beskriver punkt-massernes indbyrdes afstande,  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ . Så gælder at  $(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration hvis og kun hvis  $r$  er løsning til Albouy-Chenciners normerede usymmetriske ligninger:

$$\sum_k m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \quad (14)$$

$$S_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{r_{ik}^3} - 1 & \text{hvis } i \neq k \\ 0 & \text{hvis } i = k \end{cases}$$

*Bevis.* Lad  $\mathbf{M}_{\mathbf{N}} = \frac{\mathbf{M}}{m}$  være de 'normerede masser' så  $X\mathbf{M}_{\mathbf{N}}$  er massemidt-punktet for  $(X, \mathbf{M})$ . Vi viser først propositionen i tilfældet  $X\mathbf{M}_{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ .

Lad  $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$ . Vi vil vise følgende store biimplikation:

$$\begin{aligned} (X, \mathbf{M}) \text{ er en normeret konfiguration} \\ \Leftrightarrow XA = 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{v}^T BA = \mathbf{0} \text{ for alle } \mathbf{v} \in P \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}_{ij}^T BA \mathbf{e}_i = 0 \text{ for alle } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow (14) \text{ er opfyldt} \end{aligned}$$

Lemma 2.2 giver os første implikation og anden implikation følger af lemma 2.5 da  $X\mathbf{M}_{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ . Lad os nu vise tredje implikation.  $\Rightarrow$  er klart opfyldt (vælg blot  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{ij}$ ), så lad os antage højresiden og vise  $\Leftarrow$ . Lad først  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in P$  og derefter  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  vilkårligt. Så er  $v_i = -\sum_{j \neq i} v_j$  og vi kan skrive:

$$\mathbf{v} = \sum_{j \neq i} v_j \mathbf{e}_j + v_i \mathbf{e}_i = \sum_{j \neq i} v_j \mathbf{e}_j - \sum_{j \neq i} v_j \mathbf{e}_i = \sum_{j \neq i} v_j \mathbf{e}_{ji} = \sum_{j \neq i} -v_j \mathbf{e}_{ij}$$

Dette giver os følgende:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T BA \mathbf{e}_i &= \left( \sum_{j \neq i} -v_j \mathbf{e}_{ij} \right)^T BA \mathbf{e}_i \\ &= \left( \sum_{j \neq i} -v_j \mathbf{e}_{ij}^T \right) BA \mathbf{e}_i = \sum_{j \neq i} -v_j (\mathbf{e}_{ij}^T BA \mathbf{e}_i) = 0 \end{aligned}$$

Da  $i \in \{1, \dots, n\}$  var vilkårlig må  $\mathbf{v}^T BA = \mathbf{0}$ .

Nedenstående viser  $2\mathbf{e}_{ij}^T B A \mathbf{e}_i = \sum_k m_k S_{ik} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2)$ , og giver dermed sidste implikation.

$$\begin{aligned}
2\mathbf{e}_{ij}^T B A \mathbf{e}_i &= 2\mathbf{e}_i^T B A \mathbf{e}_i - 2\mathbf{e}_j^T B A \mathbf{e}_i \\
&= 2(BA)_{ii} - 2(BA)_{ji} \\
&= \sum_k m_k S_{ki} (r_{ii}^2 - r_{ik}^2) - \sum_k m_k S_{ki} (r_{ij}^2 - r_{jk}^2) \\
&= \sum_k m_k S_{ki} (-r_{ik}^2) + \sum_k m_k S_{ki} (r_{jk}^2 - r_{ij}^2) \\
&= \sum_k m_k S_{ki} (r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2)
\end{aligned}$$

Her brugte vi undervejs følgende substitution:

$$\begin{aligned}
2(BA)_{ij} &= 2 \sum_{k \neq j} B_{ik} A_{kj} + 2B_{ij} A_{jj} \\
&= 2 \sum_{k \neq j} \left( -\frac{1}{2} r_{ik}^2 \right) (m_k S_{kj}) + 2 \left( -\frac{1}{2} r_{ij}^2 \right) \left( -\sum_{k \neq j} m_k S_{kj} \right) \\
&= r_{ij}^2 \sum_{k \neq j} m_k S_{kj} - \sum_{k \neq j} r_{ik}^2 m_k S_{kj} \\
&= \sum_{k \neq j} m_k S_{kj} (r_{ij}^2 - r_{ik}^2) = \sum_k m_k S_{kj} (r_{ij}^2 - r_{ik}^2)
\end{aligned}$$

Lad nu  $(X, \mathbf{M})$  være en konfiguration så massemidtpunktet  $\mathbf{c} = X \mathbf{M}_{\mathbf{N}} \neq \mathbf{0}$ . Lad  $X_0 = X - \mathbf{c}L$  således at  $(X_0, \mathbf{M})$  er  $(X, \mathbf{M})$  'translateret til origo'. Disse er ækvivalent,  $(X, \mathbf{M}) \sim (X_0, \mathbf{M})$  og lemma 2.3 giver så, sammen med ovenstående, at:

$(X, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration

$$\Leftrightarrow (X_0, \mathbf{M}) \text{ er en normeret konfiguration}$$

$$\Leftrightarrow (14) \text{ er opfyldt når } r \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) \text{ er afstandsmatricen til } (X_0, \mathbf{M})$$

Lemma 2.1 giver at  $r$  svarende til de to konfigurationer er ens, så ovenstående  $r$  er også afstandsmatricen til  $(X, \mathbf{M})$ .  $\square$

$\Rightarrow$ -retningen i ovenstående proposition fortæller os:

**Korollar 2.7.**  $\Omega$  sender elementer fra  $C$  over i løsninger til (14).

Ved at lægge den  $(i, j)$ 'te og  $(j, i)$ 'te ligning fra (14) sammen får vi Albouy-Chenciners normerede symmetriske ligninger:

$$\sum_k m_k (S_{ik}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) + S_{jk}(r_{ik}^2 - r_{jk}^2 - r_{ij}^2)) = 0 \quad (15)$$

Vi ser at der er  $n(n-1)$  usymmetriske, og  $\frac{n(n-1)}{2}$  symmetriske ligninger.

### 2.3 $\Omega$ er injektiv

Lad  $(X, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M})$  være normerede konfigurationer sådan at  $\Omega[X, \mathbf{M}] = \Omega[Y, \mathbf{M}]$ , dvs.  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|$  for alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Følgende proposition giver at  $(X, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M})$  er ækvivalente, dvs.  $\Omega$  er injektiv.

**Proposition 2.8.** *Lad  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_N \in \mathbb{R}^d$ . Antag at  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\|$  for alle  $0 \leq i, j \leq N$ . Så findes en ortogonal matrix  $G \in O(d)$  og et  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  sådan at  $G\mathbf{x}_i + \mathbf{u} = \mathbf{y}_i$  for alle  $0 \leq i \leq N$ .*

Lad os beskrive ideen til beviset for denne proposition: Translationen er ikke svær at tage højde for, så lad os antage at  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = \mathbf{y}_0$  (og så må  $\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{y}_i\|$  for alle  $i$ ). Vi laver QR-faktoriseringer så  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = Q_X R$  (i virkeligheden skal vi her have at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  er lineært uafhængige. Dette tager vi højde for i beviset) og tilsvarende  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) = Q_Y S$ .  $Q_X$  og  $Q_Y$  har ortonormale søjler, og så følger det at:

$$\|\mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_i\|, \quad \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|$$

Dette, kombineret med at  $R$  og  $S$  er øvre triangulære matricer med positiv diagonal, er nøglen til at vise at  $R = S$ . I beviset foregår dette ved induktion. Herefter følger at  $G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N) = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N)$  for en ortogonal matrix  $G$ .

Hvis læseren tror på propositionen, kan beviset (der er langt og ikke særlig pænt) inklusiv de to lemmaer, springes over.

*Bevis.* Vi viser først propositionen i tilfældet  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ . I de sidste linjer i beviset udvides dette til alle  $\mathbf{x}_0$  og  $\mathbf{y}_0$ .

Uanset hvilket  $G$  der vælges gælder  $G\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = \mathbf{y}_0$ , så vi skal vælge  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  og kan fremover se bort fra  $\mathbf{x}_0$  og  $\mathbf{y}_0$ . Der gælder nu følgende:

$$\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{y}_i\| \quad \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (16)$$

Vi vil finde en orthogonal matrix  $G$  så  $G\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$  for  $i = 1, \dots, N$ .

Lad  $n$  være dimensionen af rummet udspændt af  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$  og antag at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er lineært uafhængige (senere undersøges tilfældet hvor  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$

ikke er lineært uafhængige). Lad så  $n'$  være det største tal sådan at  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n'}$  er lineært uafhængige.

Pr. sætning 5.6.2 i [11] kan vi finde matricer med ortonormale søjler  $Q_X \in \text{Mat}_{d \times n}(\mathbb{R})$ ,  $Q_Y \in \text{Mat}_{d \times n'}(\mathbb{R})$  samt øvre triangulære matricer med positive indgange i diagonalen,  $R \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $S \in \text{Mat}_{n' \times n'}(\mathbb{R})$  sådan at  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = Q_X R$  og  $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n'}) = Q_Y S$ . Søjlerne i  $R$  skrives som  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  og  $S$ 's søjler som  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{n'}$ .

For  $k \in \{n+1, \dots, N\}$  kan  $\mathbf{x}_k$  skrives som en linearkombination med nogle faktorer  $a_{kj}$ :  $\mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^n a_{kj} (Q_X \mathbf{r}_j) = Q_X \sum_{j=1}^n a_{kj} \mathbf{r}_j$ . For  $k \in \{n+1, \dots, N\}$  giver det derfor mening at definere  $\mathbf{r}_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \mathbf{r}_j$  for så er  $\mathbf{x}_k = Q_X \mathbf{r}_k$  for alle  $k \in \{1, \dots, N\}$ . For  $k \in \{n'+1, \dots, N\}$  kan vi definere  $\mathbf{s}_k$  på samme måde og få:

$$\mathbf{x}_k = Q_X \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{y}_k = Q_Y \mathbf{s}_k \quad \text{for } k = 1, \dots, N \quad (17)$$

Vi lader  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  være  $\mathbf{r}_i$  hvor der nederst er tilføjet 0'er til dimensionen er  $\max(n, n')$ , og ligeledes med  $\tilde{\mathbf{s}}_i$ . Herved kan vi snakke om deres differens og sum, ligesom at de kan være ens. Herunder ses et overblik over de næste trin i beviset.

1.  $Q_X^T Q_X$  og  $Q_Y^T Q_Y$  er identitetsmatricer og for  $k \in \{1, \dots, N\}$  gælder:

$$\|\mathbf{r}_k\| = \|\mathbf{s}_k\|, \quad \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i\| \text{ for } i = 1, \dots, \min(n, n')$$

2.  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{s}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{\min(n, n')} = \tilde{\mathbf{s}}_{\min(n, n')}$ .

3.  $n = n'$ .

4.  $Q_Y Q_X^T$  er en ortogonal matrix og  $Q_Y Q_X^T \mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$  for  $i = 1, \dots, N$ .

Når fjerde punkt er vist har vi fundet den ortogonale matrix  $G = Q_Y Q_X^T \in \text{Mat}_{d \times d}(\mathbb{R})$  vi ledte efter.

**Punkt 1:** Lad os skrive  $Q_X$ 's søjler som  $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ . Da disse er ortonormale gælder at  $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = 0$  når  $i \neq j$  og at  $\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i = 1$ , dvs.  $Q_X^T Q_X$  er en identitetsmatrix. Det samme kan vises for  $Q_Y^T Q_Y$ . Lad  $k \in \{1, \dots, N\}$  og  $i \in 1, \dots, \min(n, n')$ . Vi kan regne ligesom vi gjorde i (11) og få:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_k\| &= \|Q_X \mathbf{r}_k\|, & \|Q_Y \mathbf{s}_k\| &= \|\mathbf{s}_k\| \\ \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\| &= \|Q_X (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)\|, & \|Q_Y (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i)\| &= \|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i\| \end{aligned}$$

Ved at kombinere dette med nedenstående får vi resultatet til punkt 1.

$$\begin{aligned} \|Q_X \mathbf{r}_k\| &= \|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{y}_k\| = \|Q_Y \mathbf{s}_k\| \\ \|Q_X \mathbf{r}_k - Q_X \mathbf{r}_i\| &= \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_i\| = \|Q_Y \mathbf{s}_k - Q_Y \mathbf{s}_i\| \end{aligned}$$



**Punkt 2:** Vi benytter os af induktion i  $k$ . Hypotesen er at  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{s}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{s}}_{k-1}$ . Dette er klart opfyldt for  $k = 1$  da der ikke er noget at vise. Antag nu  $\tilde{\mathbf{r}}_1 = \tilde{\mathbf{s}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{s}}_{k-1}$  for et  $k = 1, \dots, \min(n, n')$  og lad os vise at  $\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{s}}_k$ . Vi har at:

- For  $i = 1, \dots, k - 1$  gælder at  $\tilde{\mathbf{r}}_i$ 's indgange  $i + 1, \dots, \max(n, n')$  alle er nul og at indgang  $i$  er forskellig fra nul (da  $R$  er øvre triangulær og har positiv diagonal).
- $\|\tilde{\mathbf{r}}_k\| = \|\mathbf{r}_k\| = \|\mathbf{s}_k\| = \|\tilde{\mathbf{s}}_k\|$  (midterste lighed får vi fra punkt 1)
- For  $i = 1, \dots, k - 1$  har vi:

$$\|\tilde{\mathbf{r}}_k - \tilde{\mathbf{r}}_i\| = \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i\| = \|\tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{s}}_i\| = \|\tilde{\mathbf{s}}_k - \tilde{\mathbf{r}}_i\|$$

Sidste punkt følger af punkt 1 samt induktionsantagelsen. Disse tre punkter er netop antagelserne i lemma 2.9 (med  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{r}}_k$ ,  $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{s}}_k$  og  $\mathbf{c}_1 = \tilde{\mathbf{r}}_1, \dots, \mathbf{c}_{k-1} = \tilde{\mathbf{r}}_{k-1}$ ). I  $\tilde{\mathbf{r}}_k$  og  $\tilde{\mathbf{s}}_k$  er indgangene  $k + 1, \dots, \max(n, n')$  allesammen 0 (da  $R$  og  $S$  er øvre triangulære) så lemmaet fortæller at  $\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{s}}_k$  op til  $k$ 'te indgangs fortegn. Men da  $R$  og  $S$  har positiv diagonal er disse to indgange begge positive. Så vi har  $\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{s}}_k$  og induktionsskridtet er taget.

**Punkt 3:** Antag med henblik på modstrid at  $n < n'$ . Så er  $\tilde{\mathbf{s}}_i = \mathbf{s}_i$  for alle  $i$  og vi har:

- For  $i = 1, \dots, n$  gælder at  $\mathbf{s}_i$ 's indgange  $i + 1, \dots, n'$  allesammen er nul og at indgang  $i$  ikke er nul.
- $\|\tilde{\mathbf{r}}_{n+1}\| = \|\mathbf{r}_{n+1}\| = \|\mathbf{s}_{n+1}\|$  (igen fra punkt 1)
- For  $i = 1, \dots, n$  gælder (fra punkt 2 ved vi  $\mathbf{s}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i$ ):

$$\|\tilde{\mathbf{r}}_{n+1} - \mathbf{s}_i\| = \|\tilde{\mathbf{r}}_{n+1} - \tilde{\mathbf{r}}_i\| = \|\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{s}_i\|$$

Dette er antagelserne i lemma 2.9 (med  $k = n + 1$ ,  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{r}}_{n+1}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s}_{n+1}$  og  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{c}_n = \mathbf{s}_n$ ). Dermed ved vi, at  $(n + 1)$ 'te indgang i  $\tilde{\mathbf{r}}_{n+1}$  og  $\mathbf{s}_{n+1}$  er ens op til fortegn.  $\mathbf{r}_{n+1}$  er en linearkombination af  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  og disse har kun  $n$  indgange. Dvs. indgang  $(n + 1)$  i  $\tilde{\mathbf{r}}_{n+1}$  er 0. Men da  $S$  har positiv diagonal er  $(n + 1)$ 'te indgang i  $\mathbf{s}_{n+1}$  ikke 0 som er modstrid. På samme måde vil antagelsen  $n > n'$  føre til modstrid. Vi får således at  $n = n'$ , og vi behøver dermed ikke længere at bruge tilde over vektorerne.

**Punkt 4:** Da både  $Q_Y$  og  $Q_X$  er  $d \times n$  matrixer kan vi gange  $Q_Y$  med  $Q_X^T$ . Det ses nu at  $Q_Y Q_X^T$  er en ortogonal matrix da:

$$(Q_Y Q_X^T)^T (Q_Y Q_X^T) = Q_X Q_Y^T Q_Y Q_X^T = Q_X Q_X^T = \mathbb{1}$$

Her blev brugt at  $Q_X^T Q_X$  og  $Q_Y^T Q_Y$  er identitetsmatricer som vist i punkt 1. Punkt 2 fortæller at  $\mathbf{r}_i = \mathbf{s}_i$  for  $i = 1, \dots, n$ , dvs:

$$Q_Y Q_X^T \mathbf{x}_i = Q_Y Q_X^T Q_X \mathbf{r}_i = Q_Y \mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i \quad i = 1, \dots, n$$

Lad  $t = n + 1, \dots, N$  og lad os vise at  $Q_Y Q_X^T \mathbf{x}_t = \mathbf{y}_t$ . Vi har nu:

- For  $i = 1, \dots, n - 1$  gælder at  $\mathbf{r}_i$ 's indgange  $i + 1, \dots, n$  allesammen er nul og at indgang  $i$  er forskellig fra nul.
- $\|\mathbf{r}_t\| = \|\mathbf{s}_t\|$  og  $\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_i\| = \|\mathbf{s}_t - \mathbf{r}_i\|$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Lemma 2.9 (med  $k = n$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_t$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s}_t$  og  $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{c}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1}$ ) giver nu andet punkt herunder:

- Indgang  $n$  i  $\mathbf{r}_n$  er forskellig fra nul og indgang  $n$  i  $\mathbf{r}_{n-1}$  er nul.
- For  $i = 1, \dots, n - 1$  er den  $i$ 'te indgang i  $\mathbf{r}_t$  og  $\mathbf{s}_t$  den samme.
- $\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_n\| = \|\mathbf{s}_t - \mathbf{r}_n\|$  og  $\|\mathbf{r}_t - \mathbf{r}_{n-1}\| = \|\mathbf{s}_t - \mathbf{r}_{n-1}\|$

Alle disse punkter er opfyldt, og vi kan derfor bruge lemma 2.10 (med  $i = n$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{r}_t$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s}_t$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{r}_n$ ,  $\mathbf{c}' = \mathbf{r}_{n-1}$ ). Fra dette fås at  $n$ 'te indgang også stemmer overens, dvs.  $\mathbf{r}_t = \mathbf{s}_t$ . Dette betyder at:

$$Q_Y Q_X^T \mathbf{x}_t = Q_Y Q_X^T Q_X \mathbf{r}_t = Q_Y \mathbf{s}_t = \mathbf{y}_t$$

Vi er nu færdig med punkt 4.

Antag nu at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er lineært afhængige. Vi gentager i så fald følgende procedure for nogle  $1 \leq i, j \leq N$  indtil  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er lineært uafhængige:

Byt om på  $\mathbf{x}_i$  og  $\mathbf{x}_j$ , og byt samtidig om på  $\mathbf{y}_i$  og  $\mathbf{y}_j$

Efter denne ombytning gælder (16) stadig. Nu kan der findes  $G$  så  $G\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$  for alle  $i$ . Herefter byttes tilbage indtil vi har det oprindelige system, og  $G\mathbf{x}_i = \mathbf{y}_i$  gælder stadig.

Vi mangler at se på tilfældet hvor  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} = \mathbf{y}_0$  ikke gælder. Her gælder for  $1 \leq i, j \leq N$  at  $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_0\|$  og at:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0)\| &= \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \\ &= \|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| = \|(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_0) - (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_0)\| \end{aligned}$$

Dvs. (16) gælder for punkterne  $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)$ ,  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$  så vi kan bruge hvad vi allerede har vist til at finde  $G \in O(d)$  så  $G(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_0$  for alle  $i$ . Dette betyder at  $\mathbf{y}_i = G(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) + \mathbf{y}_0 = G\mathbf{x}_i + (\mathbf{y}_0 - G\mathbf{x}_0)$ . Så vi beholder  $G$  og vælger  $\mathbf{u} = \mathbf{y}_0 - G\mathbf{x}_0$  hvorved  $G\mathbf{x}_i + \mathbf{u} = \mathbf{y}_i$  for  $i = 0, 1, \dots, N$ .  $\square$

**Lemma 2.9.** Lad  $k \leq m$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_{k-1} \in \mathbb{R}^m$  som kan skrives:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_m)^T, & \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \\ \mathbf{c}_i &= (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ii}, 0, \dots, 0)^T & i &= 1, \dots, k-1\end{aligned}$$

Antag at vi for  $i = 1, 2, \dots, k-1$  har  $c_{ii} \neq 0$  og at  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}_i\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}_i\|$  samt at  $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\|$ .

Så gælder at  $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$  og at  $|a_k| = |b_k|$ .

*Bevis.* Vi bruger induktion i  $\mathbf{a}$ 's og  $\mathbf{b}$ 's indgange. Induktionshypotesen er at  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}$ . I induktionsstarten skal det vises at  $a_1 = b_1$ , men dette følger af lemma 2.10 med  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1$  og  $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$  (for så er  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$  og  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}'\| = \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}'\|$  opfyldt)

Til induktionsskridtet antages for et  $i = 1, \dots, k-1$  at  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}$ , og vi skal vise  $a_i = b_i$ . Men dette følger af lemma 2.10 med  $\mathbf{c} = \mathbf{c}_i$  og  $\mathbf{c}' = \mathbf{c}_{i-1}$ .

Induktionen stopper når vi har vist at  $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ . Vi betragter igen ligningen  $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b}\|^2$ . Denne fortæller at:

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 = \sum_{i=1}^k b_i^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_i^2 + b_k^2$$

Hvilket giver  $a_k^2 = b_k^2$ , dvs.  $|a_k| = |b_k|$ . □

**Lemma 2.10.** Lad  $i \in \mathbb{N}$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c}' \in \mathbb{R}^m$  sådan at vi kan skrive:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_m)^T, & \mathbf{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \\ \mathbf{c} &= (c_1, c_2, \dots, c_i, 0, \dots, 0)^T, & \mathbf{c}' &= (c'_1, c'_2, \dots, c'_{i-1}, 0, \dots, 0)^T\end{aligned}$$

Antag at  $c_i \neq 0$  og at de  $(i-1)$  første indgange i  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$  er ens, dvs.  $a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}$ . Hvis  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|$  og  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}'\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}'\|$  er  $a_i = b_i$ .

*Bevis.* Vi trækker  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}'\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}'\|^2$  fra  $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2$  og får:

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}'\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}'\|^2$$

Vi regner først på venstresiden:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{c}'\|^2 \\
&= \left( \sum_{j=1}^i (a_j - c_j)^2 + \sum_{j=i+1}^m a_j^2 \right) - \left( \sum_{j=1}^{i-1} (a_j - c'_j)^2 + \sum_{j=i}^m a_j^2 \right) \\
&= \sum_{j=1}^i (a_j - c_j)^2 - \sum_{j=1}^{i-1} (a_j - c'_j)^2 - a_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} (a_j - c_j)^2 + (a_i - c_i)^2 - \sum_{j=1}^{i-1} (a_j - c'_j)^2 - a_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} ((a_j - c_j)^2 - (a_j - c'_j)^2) + (a_i^2 + c_i^2 - 2a_i c_i) - a_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} ((a_j - c_j)^2 - (a_j - c'_j)^2) - 2a_i c_i + c_i^2
\end{aligned}$$

Med de samme udregninger fås på højresiden:

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b} - \mathbf{c}'\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} ((b_j - c_j)^2 - (b_j - c'_j)^2) - 2b_i c_i + c_i^2 \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} ((a_j - c_j)^2 - (a_j - c'_j)^2) - 2b_i c_i + c_i^2
\end{aligned}$$

I den nye ligning vi får ved at substituere venstre- og højresiden vil summationerne forsvinde. Vi får således at  $-2a_i c_i + c_i^2 = -2b_i c_i + c_i^2$ , og da  $c_i \neq 0$  må  $a_i = b_i$ .  $\square$

## 2.4 Skalering af normerede konfigurationer

Vi vil nu udvide ækvivalens-begrebet:

Lad  $(X, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M})$  være vilkårlige konfigurationer. Disse er  $\equiv$ -ækvivalente,  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$ , hvis der findes en ortogonal matrix  $G \in \mathbb{R}^d$ , en skalar  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  og en vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  sådan at  $\mathbf{x}_i = \gamma G \mathbf{y}_i + \mathbf{u}$  for alle  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Vi ser at dette er en ækvivalensrelation:

- $\equiv$  er reflektiv. Dette er klart - vælg blot  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $G = \mathbb{1}$  og  $\gamma = 1$ .

- $\equiv$  er symmetrisk. Antag  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$ . Vi har  $X = \gamma GY + \mathbf{u}L$ . Vi vælger  $\gamma' = \gamma^{-1}$ ,  $G' = G^T$  og  $\mathbf{u}' = -\frac{1}{\gamma}G^T\mathbf{u}$ :

$$\begin{aligned}\gamma'G'X + \mathbf{u}'L &= \frac{1}{\gamma}G^T(\gamma GY + \mathbf{u}L) - \frac{1}{\gamma}G^T\mathbf{u}L \\ &= G^TGY + \frac{1}{\gamma}G^T\mathbf{u}L - \frac{1}{\gamma}G^T\mathbf{u}L = Y\end{aligned}$$

Det vil sige at  $(Y, \mathbf{M}) \equiv (X, \mathbf{M})$

- $\equiv$  er transitiv. Antag at  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M}) \equiv (Z, \mathbf{M})$ , dvs. vi kan skrive  $X = \gamma GY + \mathbf{u}L$  og  $Y = \gamma'G'Z + \mathbf{u}'L$ .

$$\begin{aligned}X &= \gamma GY + \mathbf{u}L \\ &= \gamma G(\gamma'G'Z + \mathbf{u}'L) + \mathbf{u}L \\ &= \gamma\gamma'GG'Z + (\gamma G\mathbf{u}' + \mathbf{u})L\end{aligned}$$

$G'G$  er en ortogonal matrix, så  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Z, \mathbf{M})$ .

Vi vil udvide  $\Omega$  til at sende fra disse ækvivalensklasser i stedet. Men først vises følgende lemmaer:

**Lemma 2.11.** *Lad  $(X, \mathbf{M})$  være en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda$  og  $k \in \mathbb{R}$ . Så er  $(kX, \mathbf{M})$  en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\frac{\lambda}{k^3}$ .*

*Bevis.* For  $i = 1, \dots, n$  kan vi skrive følgende (anden lighed følger af (1)):

$$\begin{aligned}\sum_{j \neq i} \frac{m_j(k\mathbf{x}_j - k\mathbf{x}_i)}{(kr_{ij})^3} &= \frac{1}{k^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}{r_{ij}^3} \\ &= \frac{1}{k^2} (-\lambda(\mathbf{x}_i - \mathbf{c})) \\ &= -\frac{\lambda}{k^3}(k\mathbf{x}_i - k\mathbf{c})\end{aligned}$$

Når  $\mathbf{x}_i$ 'erne bliver skaleret med  $k$  bliver  $r_{ij}$ 'erne det også. Vi ser at  $(kX, \mathbf{M})$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\frac{\lambda}{k^3}$  og centrum  $k\mathbf{c}$ .  $\square$

**Lemma 2.12.** *Lad  $(X, \mathbf{M}), (Y, \mathbf{M}) \in [Z, \mathbf{M}]_{\equiv}$  og skriv  $Y = \gamma GX + \mathbf{u}L$  for nogle  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $G \in O(d)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ . Hvis  $(X, \mathbf{M})$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda$  så er  $(Y, \mathbf{M})$  en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\frac{\lambda}{\gamma^3}$ .*

*Bevis.* Lad  $k = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{1/3}$ . Forrige lemma fortæller at  $(kX, \mathbf{M})$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed  $\frac{\lambda}{k^3} = \frac{\lambda}{\lambda/m} = m$ , dvs.  $(kX, \mathbf{M})$  er en normeret konfiguration. Fra lemma 2.3 ved vi at vi får en ny normeret konfiguration ved at gange  $G$  på og lægge  $\frac{k}{\gamma}\mathbf{u}$  til:  $(kGX + \frac{k}{\gamma}\mathbf{u}L, \mathbf{M})$ . Vi multiplicerer med  $k' = \frac{\gamma}{k}$  og ser, igen med forrige lemma, at  $(\gamma GX + \mathbf{u}L, \mathbf{M})$  er en central konfiguration med kvadreret vinkelhastighed:

$$mk'^{-3} = m \left(\frac{k}{\gamma}\right)^3 = m \frac{\lambda/m}{\gamma^3} = \frac{\lambda}{\gamma^3}$$

□

Dette lemma fortæller at  $C'$  givet ved følgende er veldefineret:

$$C' = \{[X, \mathbf{M}]_{\equiv} \mid (X, \mathbf{M}) \text{ er en central konfiguration}\}$$

Dette skal være definitionsmængden for  $\Omega$ 's udvidelse. Vi vil nu definere en afbildning  $T$  som tager elementer fra denne mængde:

$$T : [X, \mathbf{M}]_{\equiv} \mapsto \left[ \left(\frac{\lambda}{m}\right)^{1/3} X, \mathbf{M} \right]_{\sim} \quad (18)$$

Her er  $\lambda$  den kvadrerede vinkelhastighed for et  $(X, \mathbf{M}) \in [X, \mathbf{M}]_{\equiv}$ .

**Lemma 2.13.** *T er veldefineret og sender over i definitionsmængden for  $\Omega$ . T er desuden injektiv.*

*Bevis.* Lad  $(X, \mathbf{M}), (Y, \mathbf{M})$  være centrale konfigurationer så  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$ , det vil sige at der findes  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, G \in O(d), \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$  sådan at:

$$Y = \gamma GX + \mathbf{u}L$$

Skriv  $(X, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M})$ 's kvadrerede vinkelhastigheder som  $\lambda_X$  hhv.  $\lambda_Y$ .  $T$  giver anledning til følgende:

$$X' = \left(\frac{\lambda_X}{m}\right)^{1/3} X, \quad Y' = \left(\frac{\lambda_Y}{m}\right)^{1/3} Y \quad (19)$$

Vi skal vise at  $(X', \mathbf{M}) \sim (Y', \mathbf{M})$ , dvs. at der findes  $G' \in O(d)$  og  $\mathbf{u}' \in \mathbb{R}^d$

så  $Y' = G'X' + \mathbf{u}'L$ . Fra forrige lemma ved vi at  $\lambda_Y = \frac{\lambda_X}{\gamma^3}$ , dvs:

$$\begin{aligned} Y' &= \left(\frac{\lambda_Y}{m}\right)^{1/3} Y \\ &= \left(\frac{\lambda_X}{m\gamma^3}\right)^{1/3} (\gamma GX + \mathbf{u}L) \\ &= \left(\frac{\lambda_X}{m}\right)^{1/3} GX + \left(\frac{\lambda_X}{m\gamma^3}\right)^{1/3} \mathbf{u}L \\ &= GX' + \left(\frac{\lambda_X}{m\gamma^3}\right)^{1/3} \mathbf{u}L \end{aligned}$$

Så  $T$  er veldefineret. Vi har at  $(X, \mathbf{M}) \equiv (X', \mathbf{M})$ . Sammen med (19) forklarer lemma 2.12 så, at  $(X', \mathbf{M})$  har en kvadreret vinkelhastighed på:

$$\frac{\lambda_X}{\left(\frac{\lambda_X}{m}\right)^{1/3}} = \frac{\lambda_X}{\lambda_X/m} = m$$

Dermed er  $(X', \mathbf{M})$  en normeret konfiguration, dvs.  $T$  sender over i definitionsmængden for  $\Omega$ .

Vi mangler at vise at  $T$  er injektiv. Lad  $(X, \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M})$  være to (nye) centrale konfigurationer med kvadreret vinkelhastighed  $\lambda_X$  og  $\lambda_Y$ . Antag at  $T[X, \mathbf{M}]_{\equiv} = T[Y, \mathbf{M}]_{\equiv}$ . Vi skal vise at  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$ .

Vælg  $X' = \left(\frac{\lambda_X}{m}\right)^{1/3} X$  og  $Y' = \left(\frac{\lambda_Y}{m}\right)^{1/3} Y$ . Så gælder to ting:

1.  $(X, \mathbf{M}) \equiv (X', \mathbf{M})$  og  $(Y, \mathbf{M}) \equiv (Y', \mathbf{M})$
2.  $[X', \mathbf{M}]_{\sim} = T[X, \mathbf{M}]_{\equiv} = T[Y, \mathbf{M}]_{\equiv} = [Y', \mathbf{M}]_{\sim}$

Anden lighed i punkt to er vores antagelse mens første og tredje lighed skyldes (18). Punkt to fortæller således at  $(X', \mathbf{M}) \sim (Y', \mathbf{M})$ , og sammen med punkt et giver dette at  $(X, \mathbf{M}) \equiv (Y, \mathbf{M})$ .  $\square$

Vi kan nu definere en udvidelse  $\Omega'$  til  $\Omega$ :

**Proposition 2.14.** *Definer  $\Omega' : C' \rightarrow \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$  ved:*

$$\Omega'[X, \mathbf{M}]_{\equiv} = \Omega T[X, \mathbf{M}]_{\equiv}$$

$\Omega'$  er veldefineret og sender  $\equiv$ -ækvivalensklasser af centrale konfigurationer over i løsninger til Albouy-Chencinens normerede usymmetriske ligninger (14).  $\Omega'$  er desuden injektiv.

*Bevis.* Pr. lemma 2.13 er  $T$  veldefineret og sender over i definitionsmængden for  $\Omega$ .  $\Omega$  er også veldefineret og dermed er  $\Omega'$  det også.

$T$  er injektiv (lemma 2.13) ligesom  $\Omega$  er det (afsnit 2.3). Da en sammensætning af injektive afbildninger er injektiv må  $\Omega'$  også være injektiv.  $\square$

Dette proposition fortæller os, at løsningsmængden til Albouy-Chenciners normerede ligninger (14) har en kardinalitet større end mængden af  $\equiv$ -klasser af centrale konfigurationer.



### 3 Flere betingelser

Det er interessant at Albouy-Chenciners ligninger er uafhængige af dimensionen af rummet som den centrale konfiguration udspænder. Hvis  $d \in \mathbb{N}$  er givet, og vi vil begrænse os til konfigurationer som ligger i et  $d$ -dimensionelt rum, kan vi kræve at afstandene  $r_{ij}$  er rødder i nogle bestemte polynomier. Disse polynomier fås fra de såkaldte Cayley-Menger-determinanter. Pr. korollar 3.4 (og teksten herefter) er disse 0 hvis og kun hvis konfigurationen ligger i et  $d$ -dimensionelt rum.

Disse polynomier kan tilføjes som ekstra frembringere til idealet som blev beskrevet i kapitel 1.5. Dermed bliver varietet  $V(I)$  og den tropiske prevarietet mindre. Vi vil nu se nærmere på Cayley-Menger determinanter, og bagefter vil vi i kapitel 3.2 kort nævne Dziobeks ligninger som giver ekstra frembringere til idealet i tilfældet med  $n = 4$  punktmasser.

#### 3.1 Cayley-Menger determinanter

Dette afsnit er inspireret af [7] og [10]. Givet et  $d$  vil vi gerne kræve at en konfiguration med punkter  $\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_r \in \mathbb{R}^m$  ligger i et  $d$ -dimensionelt affint underrum. Dette er opfyldt hvis og kun hvis  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r$  ligger i et  $d$ -dimensionelt underrum hvor  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_0$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  (hele konfigurationen bliver altså translateret med  $-\mathbf{x}'_0$ ). Vi kan svare på om dette er tilfældet når vi har afgjort om der findes  $(d + 1)$  lineært uafhængige vektorer blandt  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ . I dette afsnit gives en metode til at afgøre sidstnævnte, og metoden kræver kun alle de indbyrdes afstande blandt  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r$  kendes. Disse er de samme som de oprindelige afstande:

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \|(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_0) - (\mathbf{x}'_j - \mathbf{x}'_0)\| = \|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j\|$$

For  $r \leq d$  findes selvfølgelig ikke  $(d + 1)$  lineært uafhængige vektorer blandt  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ . Hvis  $r = d + 1$  vil proposition 3.3 give svaret, og det efterfølgende korollar giver svaret for  $r \geq d + 1$ .

**Definition 3.1.** Lad  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^m$  sådan at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er lineært uafhængige. Disse danner et  $n$ -simplex som er snittet af alle konvekse mængder der indeholder  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ :

$$\bigcap_{\substack{S \subset \mathbb{R}^m \text{ konveks mængde} \\ \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset S}} S$$

Vi har f.eks. at et 1-simplex er et linjestykke, et 2-simplex en trekant, et 3-simplex en tetraeder og så videre. Normalt kræves ikke at  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , men disse specielle simplekser er tilstrækkelige for os.

Antag fortsat at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er lineært uafhængige. For  $k = 1, \dots, n-1$  lader vi  $\mathbf{p}_k$  være<sup>5</sup> projektionen af  $\mathbf{x}_{k+1}$  ned på  $\text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ . Lad så  $h_1 = \|\mathbf{x}_1\|$  og  $h_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|$  for  $k = 2, \dots, n$  være højden fra  $\mathbf{x}_k$  til rummet udspændt af  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ . Hypervolumet  $V_k$  af  $k$ -simplexet dannet af  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_k$  er:

$$V_k = \begin{cases} h_1 & \text{hvis } k = 1 \\ \int_{h=0}^{h_k} V_{k-1} \left(\frac{h}{h_k}\right)^{k-1} dh = \frac{h_k}{k} V_{k-1} & \text{hvis } k \geq 2 \end{cases}$$

Ved at bruge dette flere gange får vi:

$$V_n = \frac{1}{n!} h_n h_{n-1} \cdots h_1 \quad (20)$$

Dette bruger vi til at vise følgende:

**Lemma 3.2.** *Lad  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^m$ , og lad:*

$$A = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \\ 1 \end{array} \right| \end{pmatrix}$$

*Så er  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  lineært uafhængige hvis og kun hvis  $|A| \neq 0$ , og i så fald vil hypervolumet af  $m$ -simplexet dannet af  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_m$  opfylde  $V_m^2 = \left(\frac{|A|}{m!}\right)^2$*

*Bevis.* Determinanten ændres ikke af at trække en søjle fra en anden søjle. Dette forklarer første lighed herunder:

$$|A|^2 = \left| \begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \\ 1 \end{array} \right| \\ \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \\ 1 \end{array} \right| \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right|^2 = \left| \begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_2 \\ 1 \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \\ 1 \end{array} \right| \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_2 \\ 1 \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \\ 1 \end{array} \right| \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{array} \right|^2 \quad (21)$$

Lad os overbevise os om sidste lighed. Determinant i midten kan skrives vha. dens kofaktorer  $(m+1, i)$ ,  $i = 1, \dots, m+1$  ved:

$$\begin{aligned} 1 \cdot \text{Kofaktor}_{m+1,1} + \sum_{i=2}^{m+1} 0 \cdot \text{Kofaktor}_{m+1,i} &= \text{Kofaktor}_{m+1,1} \\ &= (-1)^{(m+1)+1} |\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m| = (-1)^m |\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m| \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Mere præcist: Vælg  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$  som i sætning 5.6.1 i [11].

Kvadreres dette fås sidste lighed. Implikationen er nu klar:  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  er lineært uafhængige hvis og kun hvis matricen til højre i (21) er invertibel, som er ækvivalent med  $|A| \neq 0$ .

Antag nu at  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  er lineært uafhængige. Så giver sætning 5.6.2 i [11] en faktorisering,  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = QR$  hvor  $Q \in O(m)$  er en ortogonal matrix og  $R$  er en øvre triangulær matrix med positiv diagonal. Da  $|Q| = \pm 1$  får vi:

$$|A|^2 = |\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m|^2 = |QR|^2 = |R|^2 = (R_{11}R_{22} \cdots R_{mm})^2$$

Det ses fra sætning 5.6.2 og 5.6.1 i [11] at  $R$ 's indgange i diagonalen er  $R_{11} = \|\mathbf{x}_1\|$  og  $R_{kk} = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|$  for  $k = 2, \dots, n$ . Dette er netop højderne, dvs.  $R_{kk} = h_k$ , så vi får at  $|A|^2 = (R_{11}R_{22} \cdots R_{mm})^2 = (h_1h_2 \cdots h_m)^2$ . Nu følger ligheden ved at kvadrere (20) og substituere ind.  $\square$

**Proposition 3.3.** *Lad  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^m$  og lad  $|M|$  være følgende (Cayley-Menger) determinant:*

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|^2 & \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2\|^2 & \cdots & \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|^2 & 0 & \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 & \cdots & \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\|^2 & \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|^2 & 0 & & \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\|^2 & \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_1\|^2 & \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_2\|^2 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Så er  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  lineært uafhængige hvis og kun hvis  $|M| \neq 0$ , og i så fald vil hypervolumet af  $m$ -simplexet dannet af  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_m$  opfylde:

$$V_m^2 = \frac{(-1)^{m-1}|M|}{2^m(m!)^2}$$

*Bevis.* I det følgende lader vi  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$  og  $\mathbf{e} = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ . Desuden lader vi  $A$  være givet som i lemma 3.2 og lader:

$$B = A - \mathbf{e}\mathbf{1}^T = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{c} \mathbf{x}_m \end{array} \right| \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Vi ser at  $\mathbf{1}(\mathbf{e}^T B) = 0 = (B^T \mathbf{e})\mathbf{1}^T$  så vi får:

$$\begin{aligned} A^T A &= (B + \mathbf{e}\mathbf{1}^T)^T (B + \mathbf{e}\mathbf{1}^T) = B^T B + B^T \mathbf{e}\mathbf{1}^T + \mathbf{1}\mathbf{e}^T B + \mathbf{1}\mathbf{e}^T \mathbf{e}\mathbf{1}^T \\ &= B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T \end{aligned}$$

Lad os betragte matricen  $B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ . Hvis vi tilføjer søjlen  $\mathbf{1}$  til højre, rækken  $\mathbf{0}^T$  nedenunder og et 1-tal nederst til højre får vi følgende blokmatrix:

$$\begin{pmatrix} B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten af denne kan skrives vha. dens kofaktorer  $(m+2, i)$ ,  $i = 1, \dots, m+2$ , ligesom vi gjorde i beviset for lemma 3.2. Vi får herved at determinanten af ovenstående matrix også er determinanten af  $B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$ . Dermed fås:

$$|A|^2 = |A^T A| = |B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T| = \begin{vmatrix} B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{vmatrix}$$

Lad os multiplicere sidste række med  $-1$  (hvorved determinanten skifter fortegn), og trække sidste søjle fra alle andre søjler:

$$-|A|^2 = \begin{vmatrix} B^T B + \mathbf{1}\mathbf{1}^T & \mathbf{1} \\ \mathbf{0}^T & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B^T B & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & -1 \end{vmatrix}$$

Hvis vi skriver sidste determinant ud med dens  $(m+2, i)$ 'te kofaktorer ser vi, at kofaktor  $(m+2, m+2)$  er  $|B^T B| = |B|^2 = 0$  (pr. (22) er  $B$  er singulær). Dvs. elementet  $-1$  er ligegyldigt for determinanten og kan erstattes med 0:

$$-|A|^2 = \begin{vmatrix} B^T B & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{vmatrix}$$

Nu multiplicerer vi de første  $(m+1)$  rækker med  $-2$ . Alle 1'ere i sidste søjle bliver herved erstattet af  $-2$ . Herefter multipliceres sidste søjle med  $-\frac{1}{2}$  sådan at den indeholder 1'ere igen. Herved skaleres determinanten med  $(-2)^{m+1}(-\frac{1}{2}) = (-2)^m$ :

$$-(-2)^m |A|^2 = \begin{vmatrix} -2B^T B & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{vmatrix}$$

Ved at dele med  $-(-2)^m$ , og skrive matricen helt ud får vi:

$$|A|^2 = \frac{-1}{(-2)^m} \begin{vmatrix} -2\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_0 & -2\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_1 & -2\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_2 & \cdots & -2\mathbf{x}_0^T \mathbf{x}_m & 1 \\ -2\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_0 & -2\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_1 & -2\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2 & \cdots & -2\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_m & 1 \\ -2\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_0 & -2\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_1 & -2\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_2 & \cdots & -2\mathbf{x}_2^T \mathbf{x}_m & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -2\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_0 & -2\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_1 & -2\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_2 & \cdots & -2\mathbf{x}_m^T \mathbf{x}_m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

For  $i = 0, \dots, m$  lægger vi nu  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i$  gange sidste søjle til  $(i + 1)$ 'te søjle, og ligeledes lægges  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i$  gange sidste række til  $(i + 1)$ 'te række (dette ændrer ikke på determinanten). Herved bliver indgang  $(i + 1, j + 1)$ ,  $0 \leq i, j \leq m$ , i ovenstående matrix til  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i - 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + \mathbf{x}_j^T \mathbf{x}_j = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2$ . Alle andre indgange forbliver uændrede:

$$|A|^2 = \frac{-1}{(-2)^m} \begin{vmatrix} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\|^2 & \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|^2 & \cdots & \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|^2 & \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1\|^2 & \cdots & \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\|^2 & \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_1\|^2 & \cdots & \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_m\|^2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Vi ser at diagonalen kun indeholder 0'ere, så matrixen her er  $M$ -matrixen fra propositionen.

Nu følger implikationen af forrige lemma:  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  er lineært uafhængige hvis og kun hvis  $|A| \neq 0$  hvilket er ækvivalent med  $|M| \neq 0$ . Hvis  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  er lineært uafhængige giver forrige lemma at hypervolumet af  $m$ -simplexet dannet af  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_m$  opfylder første lighed herunder:

$$V_m^2 = \frac{|A|^2}{(m!)^2} = \frac{-|M|}{(m!)^2(-2)^m} = \frac{(-1)^{m-1}|M|}{2^m(m!)^2}$$

□

Når vi vil afgøre om  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r$  ligger i et  $d$ -dimensionelt hyperplan kan vi bruge følgende<sup>6</sup>:

**Korollar 3.4.** *Lad  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Følgende er ækvivalent:*

- *Der findes  $d + 1$  lineært uafhængige vektorer blandt  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$ .*
- *Der findes en delmængde med  $d + 1$  punkter,  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}\} \subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ , så Cayley-Menger determinanten til  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}$  ikke er 0.*

*Bevis.*  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  indeholder  $d + 1$  lineært uafhængige vektorer hvis og kun hvis der findes en mængde med  $d + 1$  vektorer,  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}\} \subset \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ , som er lineært uafhængige. Propositionen giver at  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}$  er lineært uafhængige hvis og kun hvis Cayley-Menger determinanten til  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}$  er forskellig fra 0. □

<sup>6</sup>Dette korollar holder også hvis  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^m$  når  $m > d + 1$ . Punkterne  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}$  findes altid i et  $(d + 1)$ -dimensionelt underum.

Hvordan bruges dette korollar? Lad os sige at vi er givet alle indbyrdes afstande mellem  $\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_r$ . Denne konfiguration ligger i et  $d$ -dimensionelt affint underrum hvis og kun hvis konfigurationen, translateret med  $-\mathbf{x}'_0$  ligger i et  $d$ -dimensionelt underrum. Lad  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_0$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  beskrive de translaterede punkter.

Lad  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  og udtag de  $(d+1)$  andre  $\mathbf{y}_i$ 'er blandt  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$ , lad os skrive  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_{a_1}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_{a_2}, \dots, \mathbf{y}_{d+1} = \mathbf{x}_{a_{d+1}}$ . Vi kan beregne Cayley-Menger determinanten til disse punkter da der gælder  $\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j\| = \|\mathbf{x}_{a_i} - \mathbf{x}_{a_j}\| = \|(\mathbf{x}'_{a_i} - \mathbf{x}'_0) - (\mathbf{x}'_{a_j} - \mathbf{x}'_0)\| = \|\mathbf{x}'_{a_i} - \mathbf{x}'_{a_j}\|$ . Hvis Cayley-Menger determinanten ikke er 0 ved vi at  $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r$  ikke ligger i et  $d$ -dimensionelt rum. Hvis derimod vi får at Cayley-Menger determinanten er 0, uanset hvordan vi udtager punkterne  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{d+1}$ , så må  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  ligge i et  $d$ -dimensionelt rum.

Lad os til sidst se nærmere på tilfældet  $r = 3$ . Vi er givet afstandene mellem fire punkter,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ . Hvis vi kalder afstandene mellem punkterne for  $r_{ij}$ ,  $0 \leq i < j \leq 3$  skal vi teste om følgende determinant er 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & r_{01}^2 & r_{02}^2 & r_{03}^2 & 1 \\ r_{01}^2 & 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 1 \\ r_{02}^2 & r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & 1 \\ r_{03}^2 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Er den det, så findes de fire punkter i et affint plan (da der kun er én måde man kan udtage 3 punkter fra  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ ).

## 3.2 Dziobeks ligninger

I dette afsnit vil vi kort introducere Dziobeks ligninger. Disse giver os ekstra betingelser for centrale konfigurationer i et plan med fire punktmasser.

En konfiguration med  $n$  punktmasser er kolineær hvis alle punktmasserne findes på samme linje. Vi ved fra [5] at der findes  $\frac{n!}{2}$  klasser af kolineære centrale konfiguration med  $n$  punktmasser - en for hver ordning af punktmasserne (så længe vi ikke medtæller  $\pi$ -rotationer af konfigurationer der allerede er talt). Så der findes 12 klasser når  $n = 4$ .

Lad  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$  være punkter i en central konfiguration som ligger i et plan, dvs. alle vektorer  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$  ligger i et todimensionelt rum. Vi kender til endeligheden af de kolineære klasser, så lad os antage at  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$  ikke er kolineære så vektorerne  $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$  netop udspænder et todimensionelt rum. Under disse antagelser gælder Dziobek's ligninger:

$$S_{12}S_{34} = S_{14}S_{32} = S_{14}S_{23} = S_{13}S_{24} \quad (23)$$

For en udledning af disse ligninger henvises til [6].

## 4 Initiale termer, -idealiser og kvotientidealiser

I dette kapitel starter vi med at introducere totalordninger og termordninger. Dette er guided af kapitel 1.3 og 1.4 i [1]. Vi minder os om at en totalordning er en relation  $\preceq$  over en mængde  $S$ , hvor der for alle  $a, b, c \in S$  gælder:

1. Antisymmetri:  $a \preceq b \wedge b \preceq a \Rightarrow a = b$
2. Transitivitet:  $a \preceq b \wedge b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$
3. Totalitet:  $a \preceq b \vee b \preceq a$

Med  $a \prec b$  menes  $a \preceq b \wedge a \neq b$ . Det er ikke så svært at vise følgende:

$$\begin{aligned} &\text{En endelig mængde } S \text{ med totalordning } \preceq \text{ har et} \\ &\text{unikkt største element, dvs. } \exists v \in S \forall u \in S \setminus \{v\} : u \prec v \end{aligned} \quad (24)$$

Vi skriver de koefficientfrie monomier<sup>7</sup> i en polynomiumsring  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  som  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  hvor  $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$  er en eksponentvektor (her er  $0 \in \mathbb{N}$ ). F.eks. er  $\mathbf{x}^{(2,3,0,1)} = x_1^2 x_2^3 x_4$ . En relation  $\preceq$  over eksponentvektorerne ( $\mathbb{N}^n$ ) er en termordning hvis det udover at være en total ordning opfylder følgende for alle  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^n$ :

4. Invariant under addition:  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{w} \preceq \mathbf{v} + \mathbf{w}$
5.  $\mathbf{0} \in \mathbb{N}^n$  er mindst:  $\mathbf{0} \preceq \mathbf{u}$

Ud fra en termordning  $\preceq$  og en eksponentvektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$  kan vi definere en anden relation  $\preceq_{\mathbf{a}}$  på  $\mathbb{N}^n$  ved:

$$\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \vee (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \quad (25)$$

Så der gælder  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ . Dette skal vi bruge til at se at  $\preceq_{\mathbf{a}}$  er en termordning:

1. Antisymmetri: Antag  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v}$  og  $\mathbf{v} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Der må da gælde at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ . Ved at bruge dette sammen med (25) fås  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$  og  $\mathbf{v} \preceq \mathbf{u}$ , så pr. antisymmetri for  $\preceq$  må  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .
2. Transitivitet: Antag  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v}$  og  $\mathbf{v} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{w}$ . Hvis  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$  eller  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}$ , så må  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}$ , dvs  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{w}$ . Hvis derimod  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}$  får vi at  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$  og  $\mathbf{v} \preceq \mathbf{w}$ , dvs.  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{w}$  (pr.  $\preceq$ 's transitivitet) så  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{w}$ .
3. Totalitet: Der gælder altid at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \vee \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \vee (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \preceq \mathbf{v}) \vee (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} \preceq \mathbf{u})$  pga.  $\preceq$ 's totalitet. Dette er pr. (25) ækvivalent med  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v} \vee \mathbf{v} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ .

<sup>7</sup>Et monomie er et polynomie med ét led.

4. Invariant under addition: Antag at  $\mathbf{u} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v}$ . Hvis  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$  må  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} < \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ , og så må  $\mathbf{u} + \mathbf{w} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v} + \mathbf{w}$ . Hvis derimod  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$  må  $\mathbf{u} \preceq \mathbf{v}$ , og da  $\preceq$  er invariant under addition må  $\mathbf{u} + \mathbf{w} \preceq \mathbf{v} + \mathbf{w}$  hvoraf det følger at  $\mathbf{u} + \mathbf{w} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{v} + \mathbf{w}$  (da  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ ).
5.  $\mathbf{0}$  er mindst: Hvis  $0 < \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  er  $\mathbf{0} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Hvis  $0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  bruger vi at  $\mathbf{0}$  er mindst for  $\preceq$ , dvs.  $\mathbf{0} \preceq \mathbf{u}$  og så får vi  $\mathbf{0} \preceq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Prikproduktet  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  kan ikke være negativt da  $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$ .

Vi husker at støtten til et polynomie er eksponentvektorerne til polynomiets led. F.eks. gælder for følgende polynomie i  $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$  at:

$$\text{supp}(3x_1^3x_2 + 7x_2x_3^6 + x_3 + 5) = \{(3, 1, 0), (0, 1, 6), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$$

## 4.1 Initielle termer, -forme og -idealer

**Definition 4.1.** Lad  $\preceq$  være en termordning (f.eks. som givet i (25)). For et  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  findes der pr. (24) en unik største eksponentvektor  $\mathbf{v} \in \text{supp}(f)$ . Derfor kan vi definere den initielle term,  $\text{in}_{\preceq}(f)$  som:

$$\text{in}_{\preceq}(f) := c_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \quad \text{hvor} \quad \mathbf{u} \preceq \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \text{supp}(f) \quad (26)$$

For et ideal i en polynomiumsring,  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , definerer vi det  $\preceq$ -initielle ideal ved:

$$\text{in}_{\preceq}(I) := \langle \text{in}_{\preceq}(f) \mid f \in I \rangle \quad (27)$$

Til næste definition indfører vi for  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$   $\mathbf{a}$ -graden af  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ :

$$\text{deg}_{\mathbf{a}}(f) := \max\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \text{supp}(f)\} \quad (28)$$

**Eksempel 4.2.** Lad  $f = x^2 + 5x^2y - 2y^2 + 1 \in \mathbb{C}[x, y]$ . Hvis  $\mathbf{a} = (1, 1)$  er:

$$\text{deg}_{\mathbf{a}}(f) = \max\{\mathbf{a} \cdot (2, 0), \mathbf{a} \cdot (2, 1), \mathbf{a} \cdot (0, 2), \mathbf{a} \cdot (0, 0)\} = 3$$

Ligeledes er  $\text{deg}_{(0,2)}(f) = 4$  og  $\text{deg}_{(-1,-1)}(f) = 0$ .

**Definition 4.3.** Lad  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . For  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  defineres den  $\mathbf{a}$ -initielle form,  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f)$  som summen af de led,  $c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$ , med størst  $\mathbf{a}$ -grad:

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f) := \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \quad (29)$$

Som før kan vi definere det  $\mathbf{a}$ -initielle ideal for et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ :

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(I) := \langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \mid f \in I \rangle$$



Et monomie  $c\mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  siger vi er  $\mathbf{a}$ -større end et andet monomie  $d\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  hvis  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ . For  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  indfører vi nu:

- (hyper)planer ved  $H_{\mathbf{u}}^= = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0\}$ .
- åbne halvplaner ved  $H_{\mathbf{u}}^< = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < 0\}$ .
- lukkede halvplaner ved  $H_{\mathbf{u}}^{\leq} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \leq 0\}$ .

**Lemma 4.4.** *Lad  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ . Så er følgende en åben mængde:*

$$\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \text{ er et monomie}\}$$

*Bevis.* Denne mængde indeholder alle de  $\mathbf{a}$  der gør  $f$ 's første led  $\mathbf{a}$ -størst forenet med de  $\mathbf{a}$  som gør  $f$ 's andet led  $\mathbf{a}$ -størst osv:

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \text{ er et monomie}\} \\ &= \bigcup_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \text{ for alle } \mathbf{v} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}\} \end{aligned}$$

Det er nok at vise at én vilkårlig mængde fra denne forening er åben, så lad  $\mathbf{u} \in \text{supp}(f)$ . Vi har:

$$\begin{aligned} & \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \text{ for alle } \mathbf{v} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}\} \\ &= \bigcap_{\mathbf{v} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}} \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}\} \end{aligned}$$

Et tomt snit er hele  $\mathbb{R}^n$ , som er åben, så vi antager at snittet ikke er tomt. Da  $\text{supp}(f)$  er endelig er det nok at vise at én vilkårlig mængde fra dette snit er åben, så lad  $\mathbf{v} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}\}$ .  $H_{\mathbf{v}-\mathbf{u}}^<$  er åben, og så bringer følgende os i mål:

$$\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} > \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}\} = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n : 0 > \mathbf{a} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})\} = H_{\mathbf{v}-\mathbf{u}}^<$$

□

Følgende er en lidt ændret udgave af definition 1.6.9 i [1].

**Definition 4.5.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal og  $\preceq$  en termordning. Vi kalder monomierne  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin \text{in}_{\preceq}(I)$  for standard monomierne mht.  $I$  og  $\preceq$ . Standardmonomiernes eksponentvektorer betegnes:*

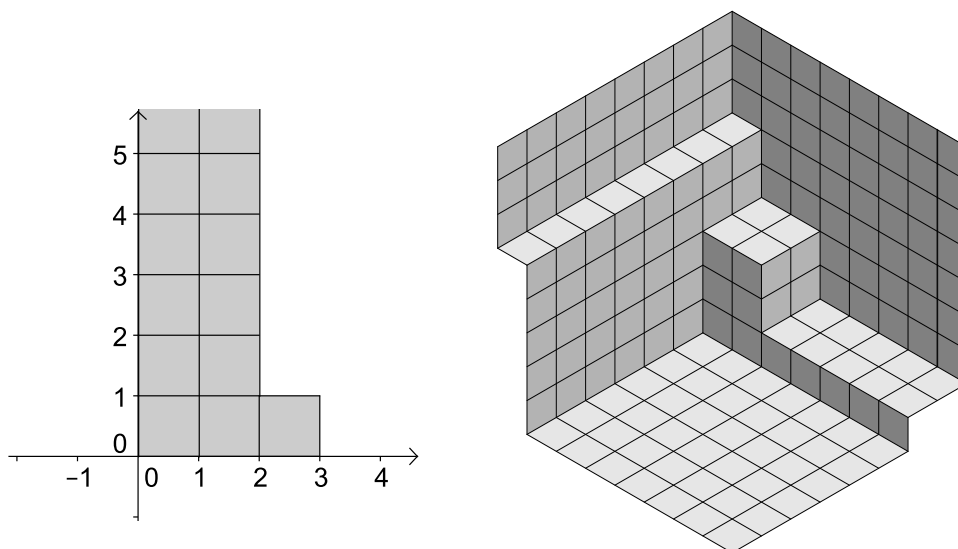
$$\text{std}_{\preceq}(I) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n : \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \notin \text{in}_{\preceq}(I)\}$$

Til det næste eksempel skal vi have defineret Gröbnerbaser. En Gröbnerbasis mht. et ideal  $I$  og en termordning  $\preceq$  er en endelig mængde  $\{g_1, \dots, g_k\} \subset I$  så  $\langle \text{in}_{\preceq}(g_1), \dots, \text{in}_{\preceq}(g_k) \rangle = \text{in}_{\preceq}(I)$ . Gröbnerbaser er nyttige fordi de gør det nemt at afgøre om et polynomie er indeholdt i idealet, se korollar 1.6.11 i [1].

**Eksempel 4.6.** *Betragt følgende ideal:*

$$I = \langle x^2y - 2xy - y^2 + 3y, x^3 - 2x^2 - xy + 3x \rangle$$

Det kan vises<sup>8</sup> at de to frembringerne er en Gröbnerbasis for  $I$ , dvs.  $\text{in}_{\preceq}(I) = \langle x^2y, x^3 \rangle$ . Standardmonomierne er således  $x^2, xy^a, y^a$  hvor  $a \in \mathbb{N}$ . Vi kan tegne  $\text{std}_{\preceq}(I)$  som et trappediagram (se figur 2 til venstre).



Figur 2: Eksempler på kassedigrammer

Vi kan også tegne et trappediagram i tre dimensioner. For et ideal  $J$  hvor  $\text{in}_{\preceq}(J) = \langle x^3y, y^3x, y^5, xz^2 \rangle$  illustrerer højre trappediagram i figur 2 idealet  $\text{std}_{\preceq}(J)$ . Diagrammet kan ses på to måder. For et korrekt indtryk skal de lyse flader ses som pegende opad.

Alt herfra og indtil kapitel 4.2 går ud på at vise korollar 4.10. Med dette korollar er det muligt at finde generatorerne for initiale idealer  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I)$ , som vi kommer til at bruge meget i de næste afsnit. Vi har kun vist at  $\preceq_{\mathbf{a}}$  er en termordning for  $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ . Dette gælder dog også for  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  hvis vi ikke kræver femte punkt opfyldt: at  $\mathbf{0}$  er mindst. Definition 4.1 giver stadig mening for disse ‘anderledes’ termordninger.

<sup>8</sup>Se theorem 1.7.2 i [1] og brug den lexicografiske ordning.

**Lemma 4.7.** Tag et vilkårligt polynomie og monomie  $f, \alpha \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  og  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Så gælder at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{x}^{\mathbf{v}} f) = \alpha \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \text{in}_{\mathbf{a}}(f)$

*Bevis.* Skriv  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$ . Så gælder:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \text{in}_{\mathbf{a}}(f) = \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \deg_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \deg_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$$

Vi ser at  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \deg_{\mathbf{a}}(f)$  hvis og kun hvis  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \deg_{\mathbf{a}}(f) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$ . Det kan nemt tjekkes at  $\deg_{\mathbf{a}}(f) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \deg_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}} f)$  så vi får:

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \text{in}_{\mathbf{a}}(f) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \deg_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}} f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$$

Dette er netop  $\text{in}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}} f)$  fordi  $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u} + \mathbf{v}}$ . Ved at arbejde lidt mere med definitionen kan vi også få skalaren med:  $\alpha \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \text{in}_{\mathbf{a}}(f) = \text{in}_{\mathbf{a}}(\alpha \mathbf{x}^{\mathbf{v}} f)$ .  $\square$

Følgende proposition og korollar er guidet af proposition 1.8 og korollar 1.9 i [2].

**Lemma 4.8.** Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal,  $\preceq$  en termordning,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  og  $f \in \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$ . Så findes  $g \in I$  så  $\text{in}_{\preceq}(f) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g))$ .

*Bevis.* Hvis  $f = 0$  er  $\text{in}_{\preceq}(f) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(0))$  så antag at  $f \neq 0$ . Vi kan skrive  $f = s_1 \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + s_n \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n)$  for nogle  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  og  $g_1, \dots, g_n \in I$ . Vi kan antage at  $s_i$ 'erne er monomier ved at tillade hver frembringer  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_i)$  at optræde flere gange i summen. Lemma 4.7 giver nu at:

$$s_k \text{in}_{\mathbf{a}}(g_k) = \text{in}_{\mathbf{a}}(s_k g_k) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Da  $s_k g_k \in I$  kunne vi fra starten lige så godt have valgt  $g_i$ 'erne således. Så vi kan antage at  $f = \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n)$ .

Lad  $d = \deg_{\mathbf{a}}(\text{in}_{\preceq}(f))$  og omnavngiv  $g_1, \dots, g_n$  så  $\deg_{\mathbf{a}}(g_i) = d$  for  $i = 1, \dots, p$  og  $\deg_{\mathbf{a}}(g_i) \neq d$  for  $i = p + 1, \dots, n$ . For  $i \leq p$  har ethvert led i  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_i)$  nu  $\mathbf{a}$ -grad  $d$ , og for  $i > p$  findes intet led i  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_i)$  som har  $\mathbf{a}$ -grad  $d$ . Dvs:

$$\text{in}_{\preceq}(f) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n)) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + \text{in}_{\mathbf{a}}(g_p)) \quad (30)$$

Da  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(g_p)$  kun indeholder led af  $\mathbf{a}$ -grad  $d$  må  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1 + \dots + g_p) = \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + \text{in}_{\mathbf{a}}(g_p)$  (leddene af  $\mathbf{a}$ -grad  $d$  i  $g_1 + \dots + g_n$  går ikke ud, for i så fald ville  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(g_p) = 0$  og så medfører (30) at  $\text{in}_{\preceq}(f) = 0$ , og vi antog at  $f \neq 0$ ). Vi har nu at:

$$\text{in}_{\preceq}(f) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + \text{in}_{\mathbf{a}}(g_p)) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g_1 + \dots + g_p))$$

$\square$

**Proposition 4.9.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal,  $\preceq$  en termordning og  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Så gælder  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I)) = \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(I)$ .*

*Bevis.* Første skridt er at vise (31) for et vilkårligt  $f \in I$ . I  $f$  findes et led  $c_{\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  så  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f)) = c_{\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ . Vi vil vise at  $\text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(f) = c_{\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$ , så pr. (26) skal følgende vises:

$$\mathbf{v} \in \text{supp}(f) \quad \wedge \quad \mathbf{v} \succeq_{\mathbf{a}} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \text{supp}(f)$$

Vi har at  $\mathbf{v} \in \text{supp}(\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f))) \subset \text{supp}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f)) \subset \text{supp}(f)$ , så lad  $\mathbf{u} \in \text{supp}(f)$  vilkårligt og lad os vise at  $\mathbf{v} \succeq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ .

$\mathbf{v} \in \text{supp}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f))$  så pr. (29) må  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \deg_{\mathbf{a}}(f)$ , dvs.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} \geq \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ . Hvis der gælder skarp ulighed giver (25) at  $\mathbf{v} \succeq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Hvis der gælder lighed får vi  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \deg_{\mathbf{a}}(f)$ , dvs.  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{supp}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f))$ . Da  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f)) = c_{\mathbf{v}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  giver (26) at  $\mathbf{v} \succeq \mathbf{u}$ , dvs.  $\mathbf{v} \succeq_{\mathbf{a}} \mathbf{u}$ . Nu er følgende vist:

$$\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f)) = \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(f) \quad \text{for alle } f \in I \quad (31)$$

Vi vil nu vise at  $\text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(I)$ 's frembringere ligger i  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I))$  og omvendt. Så tag en frembringer fra  $\text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(I)$  som skrives  $\text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(f)$  for et  $f \in I$ . Vi har  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f) \in \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  og dermed  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(f)) \in \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I))$ . Pr. (31) gælder så at  $\text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(f) \in \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I))$ .

Tag nu omvendt en frembringer fra  $\text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I))$  og skriv den  $\text{in}_{\preceq}(f)$  for et  $f \in \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$ . Lemma 4.8 giver så at  $\text{in}_{\preceq}(f) = \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g)) = \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(g) \in \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(I)$  for et  $g \in I$ .  $\square$

**Korollar 4.10.** *Lad  $G$  være en Gröbner basis for  $I$  mht  $\preceq_{\mathbf{a}}$ . Så er  $G' = \{\text{in}_{\mathbf{a}}(g) \mid g \in G\}$  en Gröbner basis for  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  mht.  $\preceq$ .*

*Bevis.* Tag et vilkårligt  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g) \in G'$ . Da  $g \in I$  må  $\text{in}_{\mathbf{a}}(g) \in \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$ . Dvs.  $G' \subset \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$ . Nu giver forrige proposition første lighed herunder, og det at  $G$  er en Gröbner basis for  $I$  anden lighed:

$$\begin{aligned} \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(I)) &= \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(I) = \langle \text{in}_{\preceq_{\mathbf{a}}}(g) \mid g \in G \rangle \\ &= \langle \text{in}_{\preceq}(\text{in}_{\mathbf{a}}(g)) \mid g \in G \rangle = \langle \text{in}_{\preceq}(g') \mid g' \in G' \rangle \end{aligned}$$

$\square$

## 4.2 Nogle resultater fra polyhedral geometri

Inden vi kan snakke om tropisk geometri skal vi introducere lidt teori fra polyhedral geometri. Meget i dette kapitel er blot gentagelser af dele af teorien i kapitel 3 i [1]. Undtagelser er eksempel 4.12 samt lemma 4.14.

**Definition 4.11.** En delmængde  $P \subset \mathbb{R}^n$  er en polyhedralkegle hvis der findes  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$  sådan at:

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_{\mathbf{b}_i}^{\leq}$$

Dimensionen af en kegle er dimensionen af det mindste underrum der indeholder den. Det relativt indre<sup>9</sup> af en  $d$ -dimensionel polyhedralkegle  $P$  betegnes  $P^0$  og er mængden af de punkter  $\mathbf{x} \in P$  hvorom der findes en  $d$ -dimensionel kugle helt indeholdt i  $P$ .

Vi kan lade disse  $\mathbf{b}_i$ 'er være rækker i en matrix  $B$  og så vil snittet ovenover være lig<sup>10</sup>  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : B\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ .

**Eksempel 4.12.** Lad  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  og  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Lad så  $P \subset \mathbb{R}^3$  være givet ved  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge B\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$ . Betingelsen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = 0$  er ækvivalent med  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ , så  $P$  kan også skrives:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \right\}$$

Dvs.  $P$  er en polyhedralkegle. Med samme argumentation ses at:

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq 0 \right\}$$

Der gælder ikke at  $P \subset H_{(0,0,1)}^-$ , så vi kan ikke tilføje  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  som række til  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Dette eksempel demonstrerer at to matrixer  $A$  og  $B$  også kan angive en polyhedralkegle. Enhver polyhedralkegle kan angives således da vi tillader at  $A$  kan være en tom matrix.

Følgende er lemma 4.5.3 fra [1].

<sup>9</sup>For en mere præcis definition af det relativt indre af en kegle, se kapitel 4.5 i [1].

<sup>10</sup>For to vektorer  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  og  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  mener vi med  $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$  at  $u_i \leq v_i$  for alle  $i = 1, \dots, n$ . Tilsvarende mener vi for  $<$  og  $=$ .

**Lemma 4.13.** Lad  $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$  og  $B \in \mathbb{R}^{d \times n}$  og betragt polyhedralkeglen:

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge B\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$$

Lad  $A'$  være matricen der indeholder alle rækker fra  $A$  samt rækkerne  $\mathbf{b}_i$  fra  $B$  som opfylder  $P \subset H_{\mathbf{b}_i}^-$ . Lad så  $B'$  indeholde de resterende rækker fra  $B$ . Så gælder at  $P^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A'\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge B'\mathbf{x} < \mathbf{0}\}$

Ved brug af dette lemma viser vi:

**Lemma 4.14.** Lad  $P, Q \subset \mathbb{R}^n$  være to polyhedralkegler så  $P^0 \cap Q^0 \neq \emptyset$ . Så gælder at  $P^0 \cap Q^0 = (P \cap Q)^0$ .

Vi bemærker, at det giver mening at snakke om det relativt indre til  $P \cap Q$  fordi  $P \cap Q$  er en polyhedralkegle (dette følger af definitionen).

*Bevis.*  $P$  kan beskrives med matricer  $A \in \mathbb{R}^{d' \times n}$  og  $B \in \mathbb{R}^{d \times n}$  og tilsvarende for  $Q$  med matricer  $C$  og  $D$ :

$$\begin{aligned} P &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge B\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \\ Q &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : C\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge D\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\} \end{aligned} \quad (32)$$

Lad  $\mathbf{b}_i$  være en række fra  $B$  som opfylder  $P \subset H_{\mathbf{b}_i}^-$ . Så kan vi tilføje  $\mathbf{b}_i$  som række i  $A$  og (32) holder stadig. Herefter kan  $\mathbf{b}_i$  fjernes fra  $B$  og (32) holder stadig. Vi kan gentage dette og derfor antage at ingen række  $\mathbf{b}_i$  i  $B$  opfylder  $P \subset H_{\mathbf{b}_i}^-$  og ligeledes at ingen række  $\mathbf{d}_i$  i  $D$  opfylder  $Q \subset H_{\mathbf{d}_i}^-$ . Med notationen i lemma 4.13 gælder altså  $A' = A$ ,  $B' = B$ ,  $C' = C$  og  $D' = D$ , dvs:

$$\begin{aligned} P^0 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge B\mathbf{x} < \mathbf{0}\} \\ Q^0 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : C\mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge D\mathbf{x} < \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

Lad nu  $\mathbf{p} \in P^0 \cap Q^0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \mathbf{x} < \mathbf{0} \right\}$ . Denne mængde skal vi vise er det relativt indre til  $P \cap Q$ . Med (32) ses det at keglen  $P \cap Q$  kan skrives:

$$P \cap Q = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \wedge \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \mathbf{0} \right\}$$

Pr. lemma 4.13 mangler vi kun at vise at ingen række  $\mathbf{r}$  i  $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$  opfylder  $P \cap Q \subset H_{\mathbf{r}}^-$ . Vi valgte  $\mathbf{p}$  sådan at  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} < 0$  for alle rækker  $\mathbf{r}$  heri, men dette betyder at  $\mathbf{p} \notin H_{\mathbf{r}}^-$  for alle rækker  $\mathbf{r}$ . Da der også gælder  $\mathbf{p} \in P \cap Q$  kan der ikke gælde  $P \cap Q \subset H_{\mathbf{r}}^-$ .  $\square$

De to næste definitioner er også fra kapitel 3 i [1]:

**Definition 4.15.** *Lad  $P$  være en polyhedralkegle og  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  sådan at mængden  $\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in P\}$  har et maksimum  $m$ . Sidefladen af  $P$  mht.  $\mathbf{a}$  defineres ved:*

$$\text{face}_{\mathbf{a}}(P) := \{\mathbf{x} \in P \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = m\}$$

Mængden af sideflader til en kegle  $P$  skriver vi  $F(P)$ .

Der gælder at enhver sideflade til en polyhedralkegle selv er en polyhedralkegle (se side 33 i [1]). Følgende er proposition 4.5.2 i [1].

**Proposition 4.16.** *For en polyhedralkegle  $P$  gælder at  $P = \bigcup_{Q \in F(P)} Q^0$  og at denne forening er disjunkt.*

**Definition 4.17.** *En polyhedralvifte  $\Sigma$  er en mængde indeholdene polyhedralkegler hvor følgende er opfyldt:*

- For enhver kegle  $P \in \Sigma$  gælder at enhver sideflade  $Q \in F(P)$  findes i viften:  $Q \in \Sigma$ .
- For hver to kegler  $P, P' \in \Sigma$  så  $P \cap P' \neq \emptyset$  gælder at  $P \cap P'$  er en sideflade i  $P$ :  $P \cap P' \in F(P)$ .

Støtten af en polyhedralvifte er  $\text{supp}(\Sigma) = \bigcup_{P \in \Sigma} P$ .

For et  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  og  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  lader vi:

$$C_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \text{in}_{\mathbf{w}}(f) = \text{in}_{\mathbf{v}}(f)\} \quad (33)$$

Lad  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \text{supp}(f)$  være de  $\mathbf{v}$ -største eksponentvektorer i  $\text{supp}(f)$ , dvs:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v} = \dots = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{v} > \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

Elementerne i  $C_{\mathbf{v}}$  er de  $\mathbf{w}$  som opfylder:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w} = \dots = \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{w} > \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u} \in \text{supp}(f) \setminus \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$$

De  $\mathbf{w}$  som opfylder dette, hvor den skarpe ulighed  $>$  er ændret til  $\geq$ , er<sup>11</sup> netop mængden  $\overline{C_{\mathbf{v}}}$ . Så  $\overline{C_{\mathbf{v}}}$  er et snit af lukkede halvplaner og derfor en polyhedralkegle. Det ses også vha. lemma 4.13 at  $\overline{C_{\mathbf{v}}}^0 = C_{\mathbf{v}}$ .

Lad  $G_{\geq 0} = \{\overline{C_{\mathbf{u}}} : \mathbf{u} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n\}$  som er en mængde af polyhedralkegler. Vi sætter så  $\text{Gfan}(f) = \{Q \in F(P) : P \in G_{\geq 0}\}$  til at være mængden af alle sideflader i  $G_{\geq 0}$ . Det vises i kapitel 4 i [1] at  $\text{Gfan}(f)$  er en polyhedralvifte. Denne argumentation kan også bruges til at vise at  $G(f) := \{\overline{C_{\mathbf{u}}} : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$  er en polyhedralvifte:

---

<sup>11</sup>se lemma 3.4.6 i [1]

**Proposition 4.18.** *Lad  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  vilkårligt. Så gælder at enhver  $\overline{C_{\mathbf{u}}}$  er en polyhedralkegle, at  $\overline{C_{\mathbf{u}}}^0 = C_{\mathbf{u}}$  og at følgende er en polyhedralvifte:*

$$G(f) = \{\overline{C_{\mathbf{u}}} : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}$$

Fra to polyhedralvifter kan vi få en ny. Følgende definition og proposition findes også i kapitel 3.4 i [1]:

**Definition 4.19.** *Forfiningen af to polyhedralvifter  $\Sigma_1$  og  $\Sigma_2$  defineres til at være:*

$$\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = \{P_1 \cap P_2 \mid P_1 \in \Sigma_1, P_2 \in \Sigma_2, P_1 \cap P_2 \neq \emptyset\}$$

Det ses på denne definition at forfiningen er kommutativ:  $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 = \Sigma_2 \wedge \Sigma_1$ . Ligeledes kan tjekkes at forfiningen er transitiv:  $\Sigma_1 \wedge (\Sigma_2 \wedge \Sigma_3) = (\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) \wedge \Sigma_3$  så vi kan skrive  $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2 \wedge \Sigma_3$  uden parenteser.

**Proposition 4.20.** *For to polyhedralvifter  $\Sigma_1$  og  $\Sigma_2$  i  $\mathbb{R}^n$  gælder at  $\Sigma_1 \wedge \Sigma_2$  er en polyhedralvifte, og at  $\text{supp}(\Sigma_1 \wedge \Sigma_2) = \text{supp}(\Sigma_1) \cap \text{supp}(\Sigma_2)$ .*

Til sidst i dette afsnit præsenteres følgende proposition som giver en anden måde at se polyhedralkegler på. De to implikationer kommer fra theorem 3.1.10 og korollar 3.2.5 i [1]:

**Proposition 4.21.** *En delmængde  $P \subset \mathbb{R}^n$  er en polyhedralkegle hvis og kun hvis der findes  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  sådan at:*

$$P = \text{cone}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \{a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_k \mathbf{v}_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

### 4.3 Tropisk geometri

**Definition 4.22.** *For et polynomie  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$  vil vi nu definere den tropiske hyperflade,  $T(f)$ , ved:*

$$T(f) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \text{ er ikke et monomie}\}$$

*Et snit af endeligt mange hyperflader,  $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n)$ , kaldes for en tropisk prevarietet. Endeligt definerer vi, for et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ , den tropiske varietet ved:*

$$T(I) = \bigcap_{f \in I \setminus \{0\}} T(f)$$



Et Laurentpolynomie  $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  er et polynomie hvor man tillader at eksponenterne kan være negative. Meget af det foregående gælder også for disse: Vi definerer supporten samt  $\mathbf{a}$ -graden af  $f$  ligesom vi gjorde det for polynomier i  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Definition 4.3 giver stadig mening selvom  $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ , og vi kan derfor også skrive  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f)$ . Ovenstående definition giver altså også mening for Laurentpolynomier.

At snitte de tropiske hyperflader for frembringerne til idealet  $I$  vil ikke give  $T(I)$ , som følgende eksempel viser:

**Eksempel 4.23.** Hvis  $I = \langle x + y + 1, x + y \rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ , så ligger  $1 \in I$ , dvs.  $T(I) = \emptyset$ . Men snittet af hyperfladerne af frembringerne er:

$$T(x + y) \cap T(x + y + 1) = \{k(1, 1) : k \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

**Lemma 4.24.** Lad  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$  og lad  $G = G(f)$  være polyhedralviften fra proposition 4.18 og sæt:

$$\Sigma_f = \{P \in G : P \subset T(f)\} \quad (34)$$

Så er  $\Sigma_f$  en polyhedralvifte og der gælder:

- For alle  $P \in \Sigma_f$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0$  gælder  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f)$ .
- $T(f) = \text{supp}(\Sigma_f)$

*Bevis.* Vi viser først at  $\Sigma_f$  er en polyhedralvifte. Ethvert  $P \in \Sigma_f$  findes også i  $G$  så  $\Sigma_f$  består af polyhedralkegler. Vi mangler at vise de to punkter i definition 4.17:

- Lad  $P \in \Sigma_f$  og  $Q \in F(P)$ . Da  $G$  er en polyhedralvifte må  $Q \in G$ . Der gælder også at  $Q \subset P \subset T(f)$  så  $Q \in \Sigma_f$ .
- Lad  $P, P' \in \Sigma_f$  så  $P \cap P' \neq \emptyset$ . Da de også findes i  $G$ , som er en polyhedralvifte, gælder at  $P \cap P' \in F(P)$ .

Så  $\Sigma_f$  er en polyhedralvifte. Lad os vise første punkt i lemmaet. Ethvert  $P \in \Sigma_f$  er netop en kegle på formen  $\overline{C_{\mathbf{u}}}$  i  $G$  (se proposition 4.18). Det relativt indre af denne er blot  $C_{\mathbf{u}}$  og dermed gælder for alle  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0 = C_{\mathbf{u}}$  at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f) = \text{in}_{\mathbf{u}}(f) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f)$ .

Lad os vise andet punkt.  $\supset$ -inklusionen er nem: Lad  $\mathbf{u} \in \text{supp}(\Sigma_f)$ , dvs.  $\mathbf{u} \in P$  for et  $P \in \Sigma_f$ . Dette  $P$  opfylder  $P \subset T(f)$ .

Lad nu  $\mathbf{u} \in T(f)$ . Ethvert  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$  som opfylder  $\text{in}_{\mathbf{u}}(f) = \text{in}_{\mathbf{v}}(f)$  må også findes i  $T(f)$  (pr. definition af tropiske hyperflader), dvs:

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{\mathbf{u}}(f) = \text{in}_{\mathbf{v}}(f)\} \subset T(f)$$

Lad os tage aflukningen:

$$\overline{\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{\mathbf{u}}(f) = \text{in}_{\mathbf{v}}(f)\}} \subset \overline{T(f)}$$

Med notationen fra proposition 4.18 ser vi, at venstresiden kan skrives som  $\overline{C_{\mathbf{u}}}$ . Fra definitionen ses at  $T(f)$  er  $\mathbb{R}^m$  (som er både åben og lukket) fratrukket mængden  $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m : \text{in}_{\mathbf{a}}(f) \text{ er et monomie}\}$  som er åben pr. lemma 4.4. Det følger at  $T(f)$  må være lukket, dvs.  $\overline{C_{\mathbf{u}}} \subset \overline{T(f)} = T(f)$ . Da vi også har  $\overline{C_{\mathbf{u}}} \in G$  må  $\overline{C_{\mathbf{u}}} \in \Sigma_f$ , og så er det klart at  $\mathbf{u} \in \overline{C_{\mathbf{u}}} \subset \text{supp}(\Sigma_f)$ .  $\square$

**Proposition 4.25.** *Lad  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] \setminus \{0\}$ . Lad så  $\Sigma_{f_1}, \dots, \Sigma_{f_n}$  være polyhedralvifterne (34) og sæt:*

$$\Sigma = \Sigma_{f_1} \wedge \Sigma_{f_2} \wedge \dots \wedge \Sigma_{f_n}$$

Så er  $\Sigma$  en polyhedralvifte og der gælder:

- $T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) = \text{supp}(\Sigma)$
- For alle  $P \in \Sigma$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0$  gælder:

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_i) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f_i) \quad \text{for alle } i = 1, \dots, n$$

*Bevis.* Ved at bruge proposition 4.20 ( $n - 1$ ) gange fås at  $\Sigma$  er en polyhedralvifte. Vi får også at:

$$\begin{aligned} \text{supp}(\Sigma) &= \text{supp}(\Sigma_{f_1} \wedge \Sigma_{f_2} \wedge \Sigma_{f_3} \wedge \dots \wedge \Sigma_{f_n}) \\ &= \text{supp}(\Sigma_{f_1}) \cap \text{supp}(\Sigma_{f_2} \wedge \Sigma_{f_3} \wedge \dots \wedge \Sigma_{f_n}) \\ &= \dots = \text{supp}(\Sigma_{f_1}) \cap \text{supp}(\Sigma_{f_2}) \cap \dots \cap \text{supp}(\Sigma_{f_n}) \\ &= T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_n) \end{aligned}$$

Sidste lighed følger her af lemma 4.24. Vi mangler kun at vise andet punkt, så lad  $P \in \Sigma$  og  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0$ . Lad herefter  $i \in \{1, \dots, n\}$  vilkårligt. Når vi har vist  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f_i) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f_i)$  er beviset slut.

$\wedge$  er associativ og kommuterer, så vi kan skrive:

$$\Sigma = \Sigma_{f_1} \wedge \dots \wedge \Sigma_{f_n} = \bigwedge_{j=1}^n \Sigma_{f_j} = \Sigma_{f_i} \wedge \left( \bigwedge_{j \neq i} \Sigma_{f_j} \right)$$

Definition 4.19 fortæller at der findes  $P_1 \in \Sigma_{f_i}$  og  $P_2 \in \bigwedge_{j \neq i} \Sigma_{f_j}$  sådan at  $P = P_1 \cap P_2$ . Da  $\mathbf{a} \in P_1$  kan vi pr. proposition 4.16 finde en kegle  $Q_1 \in F(P_1)$

så  $\mathbf{a} \in Q_1^0$ . På samme måde findes  $Q_2 \in F(P_2)$  så  $\mathbf{a} \in Q_2^0$ . Så  $\mathbf{a} \in Q_1^0 \cap Q_2^0$ , og så får vi med lemma 4.14:

$$\mathbf{a} \in Q_1^0 \cap Q_2^0 = (Q_1 \cap Q_2)^0 \quad (35)$$

Det er nu klart at  $Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ , og da  $Q_1 \in \Sigma_{f_i}$  og  $Q_2 \in \bigwedge_{j \neq i} \Sigma_{f_j}$  (se første punkt i definition 4.17) må  $Q_1 \cap Q_2 \in \Sigma$ .

$\mathbf{a}$  ligger i både  $P$  og  $Q_1 \cap Q_2$  og så giver punkt 2 i definition 4.17 at  $P \cap (Q_1 \cap Q_2) \in F(P)$ , men da  $Q_1 \cap Q_2 \subset P_1 \cap P_2 = P$  betyder dette, at  $Q_1 \cap Q_2 \in F(P)$ .

Antag nu med henblik på modstrid at  $P \neq Q_1 \cap Q_2$ . Pr. proposition 4.16 er foreningen af de relative indrer af  $P$ 's sideflader disjunkt. I denne forening indgår både  $P^0$  og  $(Q_1 \cap Q_2)^0$ . Men vi har at  $\mathbf{a} \in P^0$  og samtidig  $\mathbf{a} \in (Q_1 \cap Q_2)^0$  pr. (35), så foreningen er ikke disjunkt, hvilket giver modstriden.

Vi har nu at  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in P^0 = (Q_1 \cap Q_2)^0 = Q_1^0 \cap Q_2^0 \subset Q_1^0$ . Da  $Q_1 \in \Sigma_{f_i}$  får vi med lemma 4.24 at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f_i) = \text{in}_{\mathbf{b}}(f_i)$   $\square$

Følgende er et særtilfælde af korollar 3.2.13 i [8]:

**Korollar 4.26.** *Lad  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  være projektionen af første koordinat ned på  $\mathbb{R}$  og lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  være et ideal. Så findes et ideal  $J \subset \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}]$  så  $T(J) = \pi(T(I))$ .*

Ved at bruge ovenstående viser vi nu følgende:

**Proposition 4.27.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal og  $L = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{Z}^n$ . Hvis  $T(I) \cap H_{-L}^{\leq} = \emptyset$  så gælder  $T(I) \cap H_L^{\leq} = \emptyset$*

*Bevis.* I dette bevis bruger vi følgende notation: For  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  og en  $n \times n$  matrix  $B$  lader vi  $f^B$  betegne  $f$ , hvor enhver eksponentvektor  $\mathbf{u}$  er erstattet med  $B\mathbf{u}$ :

$$\text{Hvis } f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \text{ så er } f^B = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{B\mathbf{u}}$$

Lad nu  $A$  være identitetsmatricen hvor første søjles nuller er erstattet med  $-1$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Vi vil se nærmere på idealet  $I^A := \langle f^A : f \in I \rangle$  frembragt i Laurent-polynomiumsringen  $\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . Lad os få et overblik over beviset:

1. Vi vil vise at  $T(I^A)$  ikke indeholder punkter med positiv førstekoordinat.
2. Vi antager med henblik på modstrid at  $T(I) \cap H_L^< \neq \emptyset$  og viser at  $T(I^A)$  indeholder punkter med negativ førstekoordinat.
3. Vi bruger korollar 4.26 på  $T(I^A)$  og får en modstrid.

**Punkt 1:** Lad  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n) \in T(I^A)$  og  $f \in I \setminus \{0\}$  vilkårligt. Så gælder at  $f^A \in I^A$ , dvs.  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f^A)$  har mindst to led. Lemma 4.28(3) giver os nu sidste lighed herunder:

$$\text{in}_{\mathbf{w}}(f^A) = \text{in}_{(A^{-1})^T(A^T\mathbf{w})}(f^A) = (\text{in}_{A^T\mathbf{w}}(f))^A$$

Derfor må  $\text{in}_{A^T\mathbf{w}}(f)$  have mindst to led og derfor må  $A^T\mathbf{w} \in T(f)$ . Da  $f$  var vilkårlig må  $A^T\mathbf{w} \in T(I)$  og så giver antagelsen at  $A^T\mathbf{w} \notin H_L^<$  hvilket betyder at  $-L \cdot A^T\mathbf{w} \geq 0$ , dvs:

$$0 \geq L \cdot A^T\mathbf{w} = L \cdot (w_1 - w_2 - w_3 - \dots - w_n, w_2, w_3, \dots, w_n)^T = w_1$$

Vi ser, at der ikke findes noget punkt i  $T(I_A)$  som har positiv førstekoordinat.

**Punkt 2:** Antag at vi kan finde et  $\mathbf{w} \in T(I) \cap H_L^<$ . Det er tilstrækkeligt at vise at  $(A^{-1})^T\mathbf{w} \in T(I^A)$  da førstekoordinaten i  $(A^{-1})^T\mathbf{w}$  er  $w_1 + w_2 + \dots + w_n$  (som er negativ da  $\mathbf{w} \in H_L^<$ ).

Så for vilkårlig  $g \in I^A \setminus \{0\}$  skal vi vise  $(A^{-1})^T\mathbf{w} \in T(g)$ . Vi kan skrive  $g = a_1 f_1^A + \dots + a_n f_n^A$  for nogle  $f_1, \dots, f_n \in I$  og  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$ . For ethvert  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^n$  kan vi faktorisere  $g$  ved:

$$g = \mathbf{x}^{-\mathbf{v}}(b_1 f_1^A + \dots + b_n f_n^A) \quad \text{hvor} \quad b_i = \mathbf{x}^{\mathbf{v}} a_i, i = 1, \dots, n \quad (36)$$

Vi vælger  $\mathbf{v}$  så stor at ingen af polynomierne  $b_1, \dots, b_n$  har negative eksponentvektorer, dvs.  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Da  $A^{-1}$  heller ikke har negative indgange får vi for alle  $i = 1, \dots, n$  at  $b_i^{A^{-1}} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , og så får vi at  $f := b_1^{A^{-1}} f_1 + \dots + b_n^{A^{-1}} f_n \in I$ .

For alle  $i$  gælder  $(b_i^{A^{-1}})^A = b_i$ , så vi kan omskrive (36):

$$\begin{aligned} g &= \mathbf{x}^{-\mathbf{v}} \left( (b_1^{A^{-1}})^A f_1^A + \dots + (b_n^{A^{-1}})^A f_n^A \right) \\ &= \mathbf{x}^{-\mathbf{v}} (b_1^{A^{-1}} f_1 + \dots + b_n^{A^{-1}} f_n)^A \\ &= \mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f^A \end{aligned}$$

Anden lighed gælder pr. lemma 4.28(1). Vi ved at  $\text{in}_{\mathbf{w}}(f)$  har mindst to led (da  $\mathbf{w} \in T(f)$ ) og derfor har  $(\text{in}_{\mathbf{w}}(f))^A$  også. Lemma 4.28(3) giver så at  $\text{in}_{(A^{-1})^T\mathbf{w}}(f^A)$  også har mindst to led.

Vi kan udvide lemma 4.7 så det også gælder for Laurentpolynomier, og så får vi  $\text{in}_{(A^{-1})T\mathbf{w}}(g) = \text{in}_{(A^{-1})T\mathbf{w}}(\mathbf{x}^{-\mathbf{v}} f^A) = \mathbf{x}^{-\mathbf{v}} \text{in}_{(A^{-1})T\mathbf{w}}(f^A)$ . Dvs. der er mindst to led i  $\text{in}_{(A^{-1})T\mathbf{w}}(g)$  hvilket betyder at  $(A^{-1})^T \mathbf{w} \in T(g)$ .

**Punkt 3:** Vi bruger nu korollar 4.26 til at få et ideal  $J$ , så  $T(J)$  netop er  $T(I_A)$  projiceret ned på første-aksen. Dvs. der gælder  $T(J) \cap \mathbb{R}_{>0} = \emptyset$  og  $T(J) \cap \mathbb{R}_{<0} \neq \emptyset$ . Vi deler nu op i tre tilfælde, der alle leder til modstrid:

- Hvis  $J = \{0\}$  er  $\bigcap_{f \in J \setminus \{0\}} T(f)$  et tomt snit, dvs.  $T(J) = \mathbb{R}$ .
- Hvis derimod  $J$  indeholder et monomie  $f$ , så vil intet  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$  opfylde  $\mathbf{v} \in T(f)$ , dvs.  $T(J) = \emptyset$ .
- Endelig, hvis  $J$  ikke indeholder et monomie, og ikke er  $\{0\}$ , så vil ethvert  $f \in J$  have to led. Vi får at  $0 \in T(f)$ , men i  $f$  vil der ikke være to led som er lige  $\alpha$ -store for  $\alpha \neq 0$ , dvs.  $\alpha \notin T(f)$ . Så der gælder  $T(J) = \{0\}$ .

Vi konkluderer at antagelsen  $T(I) \cap H_L^< \neq \emptyset$  var forkert.  $\square$

**Lemma 4.28.** *Lad  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  være en invertibel matrix med heltallige indgange. For et polynomie  $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  lader vi  $f^A$  betegne  $f$  hvor enhver eksponentvektor  $\mathbf{u}$  er erstattet af  $A\mathbf{u}$ .*

- For  $f, g \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$  gælder:

$$(f + g)^A = f^A + g^A \quad \text{og} \quad (fg)^A = f^A g^A$$

- For  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  gælder at  $\deg_{\mathbf{a}}(f) = \deg_{(A^{-1})T\mathbf{a}}(f^A)$ .
- For  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  gælder at  $(\text{in}_{\mathbf{a}}(f))^A = \text{in}_{(A^{-1})T\mathbf{a}}(f^A)$ .

*Bevis.* Vi skriver  $f = \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$  og  $g = \sum_{\mathbf{v} \in \text{supp}(g)} d_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}}$  og får:

$$\begin{aligned} (fg)^A &= \left( \left( \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \right) \left( \sum_{\mathbf{v} \in \text{supp}(g)} d_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \right) \right)^A \\ &= \left( \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{v} \in \text{supp}(g)}} c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}+\mathbf{v}} \right)^A = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{v} \in \text{supp}(g)}} c_{\mathbf{u}} d_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{A\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A\mathbf{v}} \\ &= \left( \sum_{\mathbf{u} \in \text{supp}(f)} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A\mathbf{u}} \right) \left( \sum_{\mathbf{v} \in \text{supp}(g)} d_{\mathbf{v}} \mathbf{x}^{A\mathbf{v}} \right) = f^A g^A \end{aligned}$$

En lignende udregning kan laves for at vise  $(f + g)^A = f^A + g^A$ . Lad os vise andet punkt, så lad  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . For ethvert  $\mathbf{u} \in \text{supp}(f)$  har vi at:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}^T A^{-1} A \mathbf{u} = ((A^{-1})^T \mathbf{a})^T A \mathbf{u} = (A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} \quad (37)$$

Så vi kan omskrive  $\text{deg}_{\mathbf{a}}(f)$ :

$$\begin{aligned} \text{deg}_{\mathbf{a}}(f) &= \max\{\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \text{supp}(f)\} \\ &= \max\{(A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \text{supp}(f)\} = \text{deg}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A) \end{aligned}$$

Sidste lighed følger af at  $\text{supp}(f^A) = \{A \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \text{supp}(f)\}$ . Lad os vise sidste punkt. Vi kan skrive  $f$  på følgende måde:

$$f = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} + \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}}$$

Vi kan således skrive  $f^A$  på følgende måde:

$$\begin{aligned} f^A &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}} + \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} < \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}} \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ (A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} \\ = \text{deg}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}} + \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ (A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} \\ < \text{deg}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}} \end{aligned}$$

Sidste lighed gælder fordi  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)$  hvis og kun hvis  $(A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} = \text{deg}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A)$  og ligeledes for  $<$  (dette gælder pr. andet punkt og (37)). Definition 4.3 fortæller nu at  $\text{in}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A)$  er første sum herover:

$$\text{in}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ (A^{-1})^T \mathbf{a} \cdot A \mathbf{u} \\ = \text{deg}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}}$$

Herpå bruger vi igen andet punkt og (37), efterfulgt af første punkt, og får:

$$\text{in}_{(A^{-1})^T \mathbf{a}}(f^A) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{A \mathbf{u}} = \left( \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \text{supp}(f) \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \text{deg}_{\mathbf{a}}(f)}} c_{\mathbf{u}} \mathbf{x}^{\mathbf{u}} \right)^A = (\text{in}_{\mathbf{a}}(f))^A$$

□

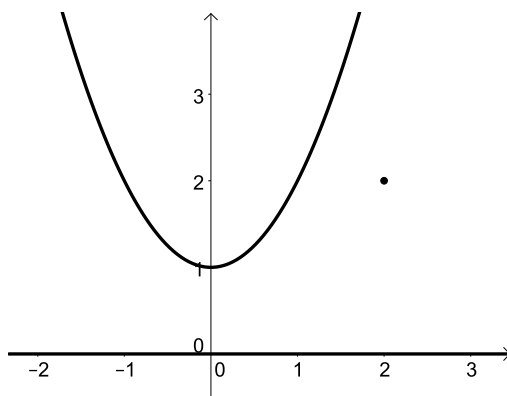
Vi skal også bruge Struktursætningen for tropiske varieteter, se sætning 3.3.6 i [8]:

**Sætning 4.29.** *For et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  gælder:*

$$\dim(T(I)) = \dim(V(I) \cap \mathbb{C}^{*n})$$

I tilfældet  $I \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  gælder således  $\dim(T(I)) = \dim(V(I) \cap \mathbb{R}^{*n})$ . Dimensions-begrebet som her bliver brugt bygger på teori, der ville kræve afskillige afsnit at beskrive. Derfor vil vi ikke give en generel definition af  $\dim(X)$  for  $X \subset \mathbb{C}^n$ . Lad os istedet retfærdiggøre vores brug med et eksempel:

**Eksempel 4.30.** *I figur 3 er varieteten af de tre idealer  $\langle y \rangle, \langle y - x^2 - 1 \rangle, \langle y - 2, x - 2 \rangle \subset \mathbb{R}[x, y]$  tegnet ind.*



Figur 3: varietetet til idealet i eksempel 4.30

*Uden meget arbejde kan det vises at foreningen af disse netop er varieteteten af idealet  $I = \langle y(y - x^2 - 1)(y - 2), y(y - x^2 - 1)(x - 2) \rangle$ . Med softwaren Singular finder vi nu følgende kvotientideal:*

$$(I : (xy)^\infty) = \langle (y - x^2 - 1)(y - 2), (y - x^2 - 1)(x - 2) \rangle$$

*Varieteten af dette er netop ovenstående figur fratrukket linjen på  $x$ -aksen. Således er  $V(I : (xy)^\infty)$  næsten lig  $V(I) \cap \mathbb{R}^{*2}$ . Eneste forskel er at punktet  $(0, 1)$  er indeholdt i førstnævnte men ikke i sidstnævnte. Det virker rimeligt at:*

$$\dim(V(I) \cap \mathbb{R}^{*2}) = \dim(V(I : (xy)^\infty)) \quad (38)$$

Lad  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...  $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Vi definerer et koordinat-underrum af  $\mathbb{N}^n$  ligesom på side 446 i [4], dvs. en mængde der kan skrives:

$$\{a_1 \mathbf{e}_{i_1} + \dots + a_r \mathbf{e}_{i_r} : a_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq r\}$$

og vi siger at sådan et koordinat-underrum har dimension  $r$ .

Vi vil som sagt ikke give en generel definition af  $\dim(X)$ , men i tilfældet hvor  $X$  er varieteten af et ideal, er dimensionen givet ved nedenstående (se proposition 2(ii), side 447 i [4]). Vi tager derfor dette som en ækvivalent definition.

**Definition 4.31.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  være et ideal. Så er  $\dim(V(I))$  givet ved følgende:*

$$\max \left\{ d \mid \begin{array}{l} d \text{ er dimensionen af et koordinat-underrum} \\ \text{som er indeholdt i } \text{std}_{\preceq}(I) \end{array} \right\}$$

( $\dim(V(I))$  er uafhængig af valg af termordning  $\preceq$ , som ses i ovennævnte proposition fra [4].) Med struktursætningen (sætning 4.29) og ovenstående eksempel motiveres følgende sætning:

**Sætning 4.32.** *For et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  gælder:*

$$\dim(T(I)) = \dim(V(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty))$$

Følgende er Dicksons lemma, se lemma 1.2.4 i [1]:

**Lemma 4.33.** *Lad  $I$  være et ideal frembragt af (evt. uendeligt mange) monomier. Så findes et endeligt sæt af monomier som frembringer  $I$ .*

F.eks. kan et ideal være frembragt af de uendeligt mange monomier  $x^a$ ,  $a \geq 2$ . I så fald er idealet også frembragt af det ene monomie  $x^2$ .

**Proposition 4.34.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $\text{std}_{\preceq}(I)$  er uendelig stor så er  $\dim(V(I)) > 0$ .*

*Bevis.*  $\text{in}_{\preceq}(I)$  er frembragt af monomier. Pr. Dicksons lemma kan vi kalde frembringernes eksponentvektorer for  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ . Lad os skrive  $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{in})$  for  $i = 1, \dots, k$  og sæt:

$$m = \max(u_{11}, \dots, u_{1n}, u_{21}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{kn})$$

Således bliver  $m$  større eller lig enhver indgang i enhver eksponentvektor  $\mathbf{u}_i$ .

Der findes kun endeligt mange eksponentvektorer hvor alle indgange er mindre end  $m$ . Så da  $\text{std}_{\preceq}(I)$  er uendelig stor må der heri være en eksponentvektor  $\mathbf{v}$  med en indgang  $i$  som er mindst  $m$ .

Lad  $\mathbf{e}_i$  være eksponentvektoren med alle indgange 0, undtagen indgang  $i$  som er 1. Da  $\mathbf{v} \in \text{std}_{\preceq}(I)$  får vi for alle  $a \in \{0, 1, \dots, m\}$  at  $x_i^a \notin \text{in}_{\preceq}(I)$  (ellers ville  $x_i^a | \mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \text{in}_{\preceq}(I)$ ) dvs. der gælder  $a\mathbf{e}_i \in \text{std}_{\preceq}(I)$ . Lad os vise at



dette også gælder for  $a \in \mathbb{N}$  med  $a > m$ , så antag omvendt at  $a\mathbf{e}_i \notin \text{std}_{\preceq}(I)$  dvs.  $x_i^a \in \text{in}_{\preceq}(I)$ .

Da  $x_i^a \in \text{in}_{\preceq}(I)$  og  $x_i^m \notin \text{in}_{\preceq}(I)$  må der være en frembringer  $\mathbf{x}^{\mathbf{u}_j}$  som deler  $x_i^a$  men ikke  $x_i^m$ , dvs.  $\mathbf{u}_j$ 's  $i$ 'te indgang kan findes i mængden  $\{m+1, m+2, \dots, a\}$  (og alle andre indgange vil være 0). Men dette modstrider med at  $m$  er større end enhver indgang i  $\mathbf{u}_j$ .

Vi har vist at  $a\mathbf{e}_i \in \text{std}_{\preceq}(I)$  for alle  $a \in \mathbb{N}$ , så der findes et koordinatunderrum af  $\text{std}_{\preceq}(I)$  som har dimension 1. Pr. definition 4.31 er  $\dim(V(I))$  så mindst 1.  $\square$

Følgende er et korollar til Hilbert's Nulstellensats, se korollar 1.8.6 i [1].

**Korollar 4.35.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  være et ideal og  $\preceq$  en termordning. Så gælder at:*

$$|V(I)| < \infty \Leftrightarrow |\text{std}_{\preceq}(I)| < \infty$$

Vi kan nu vise følgende proposition, hvis vi accepterer at dimensionen af en endelig mængde (eller blot  $\{0\}$ ) er 0:

**Proposition 4.36.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal. Hvis  $T(I) \subset \{0\}$  så gælder at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$ .*

*Bevis.* Da  $T(I) \subset \{0\}$  er  $T(I)$ 's dimensionen 0. Sætning 4.32 fortæller så, at  $\dim(V(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)) = 0$ . Proposition 4.34 giver nu (ved kontraposition) at  $|\text{std}_{\preceq}(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)| < \infty$  (for en termordning  $\preceq$ ), hvorefter korollar 4.35 viser at  $|V(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)| < \infty$ . Vi får nu at  $|V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}| < \infty$  hvis vi kan vise at  $V(I) \cap \mathbb{C}^{*n} \subset V(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ .

Vi lader  $\mathbf{u} \in V(I) \cap \mathbb{C}^{*n}$  og skal vise at  $\mathbf{u} \in V(I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ . Dvs. for et vilkårligt  $f \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$  skal vi vise at  $f(\mathbf{u}) = 0$ . Pr. definition gælder at  $(x_1 \cdots x_n)^r f \in I$  for et stort nok  $r \in \mathbb{N}$ . Og da  $\mathbf{u} \in V(I)$  gælder:

$$0 = ((x_1 \cdots x_n)^r f)(\mathbf{u}) = (u_1 \cdots u_n)^r (f(\mathbf{u}))$$

Da  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{*n}$  må  $(u_1 \cdots u_n)^r \neq 0$ , dvs. vi må have  $f(\mathbf{u}) = 0$ .  $\square$

## 4.4 Kvotientidealer

Følgende definition er fra kapitel 12 i [2]:

**Definition 4.37.** *For et  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  og et ideal  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  kalder vi følgende mængder for kvotientidealer:*

$$\begin{aligned} (I : f) &:= \{g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid fg \in I\} \\ (I : f^\infty) &:= \{g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f^r g \in I \text{ for et } r \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Det ses nemt, at disse mængder er idealer. For hvilket som helst  $\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  har vi:

$$\begin{aligned} g \in (I : f^\infty) &\Rightarrow f^r g \in I \text{ for et } r \in \mathbb{N} \Rightarrow f^r(\alpha g) \in I \Rightarrow \alpha g \in (I : f^\infty) \\ g_1, g_2 \in (I : f^\infty) &\Rightarrow f^{r_1} g_1, f^{r_2} g_2 \in I \text{ for nogle } r_1, r_2 \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow f^{\max(r_1, r_2)}(g_1 + g_2) \in I \Rightarrow g_1 + g_2 \in (I : f^\infty) \end{aligned}$$

Det samme kan vises for  $(I : f)$ , som blot er tilfældet  $r = r_1 = r_2 = 1$ .

**Proposition 4.38.** *Lad  $I \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  være et ideal og  $M \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  et monomie. Følgende er ækvivalent:*

1.  $I$  indeholder et monomie.
2.  $(I : M^\infty)$  indeholder et monomie.
3.  $(I : (x_1 x_2 \cdots x_n)^\infty) = \langle 1 \rangle$ .

Desuden gælder at  $(I : (x_1 x_2 \cdots x_n)^\infty) = (\cdots ((I : x_1^\infty) : x_2^\infty) \cdots : x_n^\infty)$

*Bevis.* 1  $\Rightarrow$  2: For et monomie  $m \in I$  har vi  $M^r m \in I$  for et hvilket som helst  $r \in \mathbb{N}$ , så  $m \in (I : M^\infty)$ . 2  $\Rightarrow$  3: For et monomie  $m \in (I : M^\infty)$  må  $M^r m \in I$  for et  $r$ . For et stort nok  $k \in \mathbb{N}$  må vi nu have at  $M^r m$  deler  $(x_1 \cdots x_n)^k$ , dvs  $(x_1 \cdots x_n)^k \in I$  så vi får  $1 \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$ . 3  $\Rightarrow$  1: Siden  $1 \in (I : (x_1 \cdots x_n)^\infty)$  må  $(x_1 \cdots x_n)^r \in I$  for et  $r \in \mathbb{N}$ .

Vi indser at  $(I : (fg)^\infty) = ((I : f^\infty) : g^\infty)$ :

$$\begin{aligned} h \in (I : (fg)^\infty) &\Rightarrow f^r g^r h \in I \text{ for et } r \\ &\Rightarrow g^r h \in (I : f^\infty) \\ &\Rightarrow h \in ((I : f^\infty) : g^\infty) \end{aligned}$$

Og:

$$\begin{aligned} h \in ((I : f^\infty) : g^\infty) &\Rightarrow g^r h \in (I : f^\infty) \text{ for et } r \\ &\Rightarrow f^s g^r h \in I \text{ for et } s \\ &\Rightarrow (fg)^{\max(r, s)} h \in I \\ &\Rightarrow h \in (I : (fg)^\infty) \end{aligned}$$

Ved at bruge dette flere gange får vi:

$$\begin{aligned} (I : (f_1 \cdots f_k)^\infty) &= ((I : f_1^\infty) : (f_2 \cdots f_n)^\infty) \\ &= \cdots = (\cdots ((I : f_1^\infty) : f_2) \cdots : f_k^\infty) \end{aligned}$$

□

## 5 Undersøgelse af den tropiske varietet

Lad  $f_1, \dots, f_6$  være Albouy-Chenciners normerede symmetriske polynomier,  $f_7, \dots, f_{18}$  Albouy-Chenciners normerede usymmetriske polynomier (begge i tilfældet  $n = 4$ ) og  $f_{19}, f_{20}, f_{21}$  Dziobek's polynomier. Hvis vi er givet konkrete masser for konfigurationerne kan vi se  $f_1, \dots, f_{21} \in \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$ . Lad  $I$  være idealet frembragt af  $f_1, \dots, f_{21}$  og lad  $\Sigma$  være polyhedralviften i  $\mathbb{R}^6$  som beskrevet i proposition 4.25. Dette proposition giver sammen med proposition 4.16 at:

$$T(I) \subset T(f_1) \cap \dots \cap T(f_{21}) = \text{supp}(\Sigma) = \bigcup_{P \in \Sigma} P = \bigcup_{\substack{P \in \Sigma \\ Q \in F(P)}} Q^0 = \bigcup_{P \in \Sigma} P^0$$

Så hvis vi kan vise, at enhver åben kegle i  $\Sigma \setminus \{\{0\}\}$  ikke er indeholdt i  $T(I)$ , fås at  $T(I) \subset \{0\}$ . Herefter kan vi bruge proposition 4.36 som nævnt i kapitel 1.5.

Vi vil desværre indse at det ikke lykkedes at vise dette for to af keglerne. Ved at benytte teori om Puiseux-rækker lykkedes dette dog i [6]. Denne teori er ikke taget med i dette speciale da det ville blive for omfattende.

I det følgende skriver vi AC-ligninger/polynomier som forkortelse for de normerede Albouy-Chenciner ligninger/polynomier.

### 5.1 Symmetri for polynomier uden masser

Til resten af dette kapitel indfører vi følgende notation: Vi lader  $S_m$  være den symmetriske gruppe for  $m$  elementer. En permutation  $\sigma \in S_m$  skrives ved et produkt af cykler, og en cykel ved  $\tau = (x_1 x_2 \dots x_i)$ . Sidstnævnte betyder at  $\tau(x_1) = x_2, \dots, \tau(x_{i-1}) = x_i, \tau(x_i) = x_1$ . Eksempelvis vil en permutationen (12)(23) først bytte om på 2 og 3, og herefter om på 1 og 2. For et polynomie  $f \in \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{24}, r_{24}, r_{34}]$  og en permutation  $\sigma \in S_4$  skriver vi også  $f_\sigma$ , med hvilket vi mener  $f$  hvor ethvert indice  $i$  er erstattet med  $\sigma(i)$ . F.eks. er  $(r_{14})_\sigma = r_{24}$  hvis  $\sigma$  er cyklen (12).

Dziobeks ligninger (23) kan omskrives til:

$$\begin{aligned} f &= r_{12}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{34}^3 (S_{12} S_{34} - S_{14} S_{23}) = 0 \\ g &= r_{12}^3 r_{13}^3 r_{24}^3 r_{34}^3 (S_{12} S_{34} - S_{13} S_{24}) = 0 \\ h &= r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 (S_{14} S_{23} - S_{13} S_{24}) = 0 \end{aligned}$$

Vi ser at  $f, g$  og  $h$  er polynomier (vi husker at  $S_{ij} = \frac{1}{r_{ij}^3} - 1$  for  $i \neq j$ ), og det er disse vi kalder Dziobeks polynomier. Løsningerne til Dziobeks ligninger altså er rødderne til Dziobeks polynomier (som ligger i  $\mathbb{R}^{*6}$ ). At byttes om

på indice 1 og 2 i  $f$  forvandler dette polynomie til  $g$ , dvs.  $f_{(12)} = g$ . Ligeså tjekkes at  $g_{(12)} = f$  og  $h_{(12)} = -h$ . Derfor gælder op til fortegn at  $\{f, g, h\} = \{f_{(12)}, g_{(12)}, h_{(12)}\}$ . Vi finder at dette også gælder for permutationen (1234):

**Note 5.1.** For Dziobeks polynomier,  $f, g, h$ , gælder for  $\tau = (12), (1234)$  at  $\{f, g, h\} = \{f_\tau, g_\tau, h_\tau\}$  op til fortegn.

De masseløse AC-ligninger er blot de almindelige AC-ligninger, hvor enhver masse  $m_i$  er sat til 1. For  $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$  ser den  $(i, j)$ 'te usymmetriske, masseløse AC-ligning således ud:

$$\sum_k S_{ik}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) = 0 \quad (39)$$

Vi ganger ligesom før en passende faktor på for at få det  $(i, j)$ 'te polynomie:

$$\left( r_{ij} \prod_{k \notin \{i, j\}} r_{ik}^3 \right) \sum_k S_{ik}(r_{jk}^2 - r_{ik}^2 - r_{ij}^2) \quad (40)$$

Vi vil nu bruge  $\tau = (12), (1234)$  på indicerne og se, at disse polynomier forbliver uændrede op til rækkefølge.

At bruge  $\tau$  på  $k$ -indicerne i summationen svarer blot til at summere i en anden rækkefølge. At bruge  $\tau$  på de resterende  $k$ -indicer ændrer  $\prod_{k \notin \{i, j\}} r_{ik}^3$  til  $\prod_{k \notin \{i, j\}} r_{i\tau(k)}^3$  som er lig  $\prod_{k \notin \{\tau(i), \tau(j)\}} r_{ik}^3$ . Så at bruge  $\tau$  på alle indicer ændrer udtrykket til:

$$\left( r_{\tau(i)\tau(j)} \prod_{k \notin \{\tau(i), \tau(j)\}} r_{\tau(i)k}^3 \right) \sum_k S_{\tau(i)k}(r_{\tau(j)k}^2 - r_{\tau(i)k}^2 - r_{\tau(i)\tau(j)}^2)$$

Ved at sammenligne med (40) ses, at dette netop er det  $(\tau(i), \tau(j))$ 'te polynomie. Vi ser at nedenstående afbildning er bijektiv<sup>12</sup>:

$$W \ni (i, j) \mapsto (\tau(i), \tau(j)) \in W = \{(i, j) : 1 \leq i, j \leq 4, i \neq j\}$$

Derfor må de tolv produkter fra (40) stadig være de samme (op til rækkefølge) efter  $\tau$  er brugt på deres indicer.

**Note 5.2.** For AC's usymmetriske masseløse polynomier,  $g_1, g_2, \dots, g_{12}$ , gælder for  $\tau = (12), (1234)$  at  $\{g_1, \dots, g_{12}\} = \{g_{1\tau}, \dots, g_{12\tau}\}$ .

<sup>12</sup>Hvis  $i \neq i'$  gælder  $\tau(i) \neq \tau(i')$  og tilsvarende for  $j$ , hvilket giver injektiviteten. Surjektiviteten følger af, at ethvert  $(i, j) \in W$  kan skrives  $(\tau(\tau^{-1}(i)), \tau(\tau^{-1}(j)))$ .

Vi lader i resten af dette afsnit  $g_1, \dots, g_{21}$  være AC's masseløse, usymmetriske og symmetriske polynomier samt Dziobeks polynomier. Det kan vises at note 5.2 også holder for AC's masseløse, symmetriske polynomier (op til fortegn). Med alle disse resultater fås:

**Note 5.3.** For  $\tau = (12), (1234)$  er  $\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{g_{1\tau}, \dots, g_{21\tau}\}$  op til fortegn.

Vi indfører lidt mere notation: For en permutation  $\sigma \in S_6$  og en vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_6) \in \mathbb{R}^6$  skriver vi  $\sigma(\mathbf{u}) = (u_{\sigma^{-1}(1)}, u_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(6)})$ . For  $g \in \mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$  skriver vi deruover  $g^\sigma$  med hvilket vi mener  $g$  hvor enhver eksponentvektor  $\mathbf{u}$  er erstattet af  $\sigma(\mathbf{u})$ . Denne notationen er faktisk præcis den samme som i proposition 4.27 hvis  $\sigma$  ses som en permutationsmatrix.

**Eksempel 5.4.** Med en eksponentvektor  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_6) \in \mathbb{N}^6$  kan vi beskrive et koefficient-frit monomie i  $\mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  ved:

$$(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})^{\mathbf{u}} = r_{12}^{u_1} r_{13}^{u_2} r_{14}^{u_3} r_{23}^{u_4} r_{24}^{u_5} r_{34}^{u_6}$$

Når vi bruger permutationen  $\sigma_1 = (1463)(25)$  på  $\mathbf{u}$  får vi:

$$\begin{aligned} (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})^{\sigma_1(\mathbf{u})} &= (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})^{(u_3, u_5, u_6, u_1, u_2, u_4)} \\ &= r_{23}^{u_1} r_{24}^{u_2} r_{12}^{u_3} r_{34}^{u_4} r_{13}^{u_5} r_{14}^{u_6} \\ &= (r_{12}^{u_1} r_{13}^{u_2} r_{14}^{u_3} r_{23}^{u_4} r_{24}^{u_5} r_{34}^{u_6})_{(1234)} \end{aligned}$$

Dvs. for et polynomie  $g \in \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  gælder  $g^{\sigma_1} = g_{(1234)}$ . Hvis f.eks.  $g = r_{12}r_{23}^2 + r_{24}$  må  $g^{\sigma_1} = r_{23}r_{34}^2 + r_{13}$ . Lad nu  $\sigma_2 = (24)(35)$ . Så får vi:

$$\begin{aligned} (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})^{\sigma_2(\mathbf{u})} &= (r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34})^{(u_1, u_4, u_5, u_2, u_3, u_6)} \\ &= r_{12}^{u_1} r_{23}^{u_2} r_{24}^{u_3} r_{13}^{u_4} r_{14}^{u_5} r_{34}^{u_6} \\ &= (r_{12}^{u_1} r_{13}^{u_2} r_{14}^{u_3} r_{23}^{u_4} r_{24}^{u_5} r_{34}^{u_6})_{(12)} \end{aligned}$$

Dvs. for et polynomie  $g \in \mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}]$  gælder  $g^{\sigma_2} = g_{(12)}$ .

Med dette eksempel fås:

**Note 5.5.** For  $\sigma = (1463)(25), (24)(35)$  gælder at  $\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{g_1^\sigma, \dots, g_{21}^\sigma\}$  op til fortegn.

Lad  $\sigma_1, \dots, \sigma_p \in \{(1463)(25), (24)(35)\}$ . Ved at vælge  $a_1, \dots, a_{21} \in \{1, -1\}$  passende kan vi få  $\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{a_1 g_1^{\sigma_p}, \dots, a_{21} g_{21}^{\sigma_p}\}$  til at gælde med fortegn. Vi kan bruge permutationen  $\sigma_{p-1}$  på alle polynomier og få:

$$\{g_1^{\sigma_{p-1}}, \dots, g_{21}^{\sigma_{p-1}}\} = \{(a_1 g_1^{\sigma_p})^{\sigma_{p-1}}, \dots, (a_{21} g_{21}^{\sigma_p})^{\sigma_{p-1}}\}$$

Dvs. der gælder  $\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{g_1^{\sigma_{p-1}}, \dots, g_{21}^{\sigma_{p-1}}\} = \{(g_1^{\sigma_p})^{\sigma_{p-1}}, \dots, (g_{21}^{\sigma_p})^{\sigma_{p-1}}\}$  op til fortegn. Ved at bruge dette trick flere gange får vi, at følgende gælder op til fortegn:

$$\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{((\dots (g_a^{\sigma_p}) \dots)^{\sigma_2})^{\sigma_1} : a = 1, 2, \dots, 21\}$$

I stedet for først at permutere  $g_a$ 's eksponentvektorer med  $\sigma_{t_p}$ , så med  $\sigma_{t_{p-1}}$ , osv. til  $\sigma_{t_1}$ , kan vi permutere dem én gang for alle med  $\sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \dots \sigma_{t_p}$ , dvs.  $((\dots (g_a^{\sigma_{t_p}}) \dots)^{\sigma_{t_2}})^{\sigma_{t_1}} = g_a^{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2} \dots \sigma_{t_p}}$ . Lad  $Q$  være permutationsgruppen<sup>13</sup> frembragt af (1463)(25) og (24)(35). Vi har vist følgende:

**Note 5.6.** For  $\sigma \in Q$  gælder  $\{g_1, \dots, g_{21}\} = \{g_1^\sigma, \dots, g_{21}^\sigma\}$  op til fortegn.

Resten af dette afsnit går ud på at vise følgende:

**Note 5.7.** Lad  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^6$ . For alle  $\sigma \in Q$  gælder at:

$$\mathbf{r} \in T(g_1) \cap \dots \cap T(g_{21}) \Leftrightarrow \sigma(\mathbf{r}) \in T(g_1) \cap \dots \cap T(g_{21})$$

Hvis vi kan vise  $\Rightarrow$ -implikationen følger  $\Leftarrow$ -implikationen nemt: Antag at  $\sigma(\mathbf{r}) \in T(g_1) \cap \dots \cap T(g_{21})$  og sæt  $\mathbf{r}' = \sigma(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}^6$  og  $\sigma' = \sigma^{-1}$ . Så giver  $\Rightarrow$ -implikationen at  $T(g_1) \cap \dots \cap T(g_{21}) \ni \sigma'(\mathbf{r}') = \sigma^{-1}(\sigma(\mathbf{r})) = \mathbf{r}$ .

Lad nu  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^6$  og  $\sigma \in Q$ . Pr. note 5.6 gælder følgende:

$$T(g_1) \cap \dots \cap T(g_n) = T(g_1^\sigma) \cap \dots \cap T(g_n^\sigma) \quad (41)$$

Så vi behøver kun at vise at  $\sigma(\mathbf{r}) \in T(g_1^\sigma) \cap \dots \cap T(g_n^\sigma)$ .

Lad  $i \in \{1, \dots, 21\}$  være vilkårlig. Så gælder  $\mathbf{r} \in T(g_i)$ , dvs. der findes mindst to led i  $\text{in}_{\mathbf{r}}(g_i)$ , og dermed også i  $(\text{in}_{\mathbf{r}}(g_i))^\sigma$ . Ved at se  $\sigma$  som en permutationsmatrix fås fra lemma 4.28(3) at  $\text{in}_{(\sigma^{-1})T_{\mathbf{r}}}(g_i^\sigma)$  indeholder mindst to led. Da  $\sigma$  er ortogonal (som en permutationsmatrix jo er) får vi  $\text{in}_{(\sigma^{-1})T_{\mathbf{r}}}(g_i^\sigma) = \text{in}_{\sigma\mathbf{r}}(g_i^\sigma)$ , dvs.  $\sigma(\mathbf{r}) \in T(g_i^\sigma)$ . Dette var for et vilkårligt  $i$ , så  $\sigma(\mathbf{r}) \in T(g_1^\sigma) \cap \dots \cap T(g_n^\sigma)$ .

## 5.2 Symmetri for polynomier med masser

Lad os skrive de symmetriske AC-polynomier ved  $f_1, \dots, f_6$  og de usymmetriske AC-polynomier ved  $f_7, \dots, f_{18}$ . Skriv også Dziobeks polynomier ved  $f_{19}, f_{20}, f_{21}$ . I disse polynomier er masserne også variabler, så polynomierne findes i  $\mathbb{R}[r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, m_1, m_2, m_3, m_4]$ . Med argumentationen fra forrige afsnit kan det vises, at der op til fortegn gælder:

$$\{f_1, \dots, f_{21}\} = \{f_{1\tau}, \dots, f_{21\tau}\} \quad \text{for } \tau = (1234), (12)$$

<sup>13</sup>En permutationsgruppe er blot en undergruppe af den symmetriske gruppe.

I stedet for at bytte om på tallene 1, 2, 3, 4 kan vi permutere eksponentvektorerne ligesom i sidste afsnit. Vi vil bruge  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  (fra sidste afsnit), men ønsker at de også bytter om på masserne. Vores løsning er at introducere to nye permutationer,  $\tilde{\sigma}_1$  og  $\tilde{\sigma}_2$ :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1 &= (\sigma_1)(7, 8, 9, 10) = (1, 4, 6, 3)(2, 5)(7, 8, 9, 10) \\ \tilde{\sigma}_2 &= (\sigma_2)(7, 8) = (2, 4)(3, 5)(7, 8)\end{aligned}$$

Så nu er  $f_{k(1234)} = f_k^{\tilde{\sigma}_1}$  og  $f_{k(12)} = f_k^{\tilde{\sigma}_2}$ ,  $k = 1, \dots, 21$ . Så gælder, op til fortegn:

$$\{f_1, \dots, f_{21}\} = \{f_1^{\tilde{\sigma}_i}, \dots, f_{21}^{\tilde{\sigma}_i}\} \quad i = 1, 2 \quad (42)$$

For vilkårligt  $\sigma \in Q$ , som skrives  $\sigma = \sigma_{t_p} \cdots \sigma_{t_1}$ ,  $t_1, \dots, t_p \in \{1, 2\}$ , lader vi  $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_{t_p} \cdots \tilde{\sigma}_{t_1}$ . Ved at bruge (42) flere gange fås følgende (op til fortegn):

$$\{f_1, \dots, f_{21}\} = \{f_1^{\tilde{\sigma}}, \dots, f_{21}^{\tilde{\sigma}}\} \quad \forall \sigma \in Q \quad (43)$$

Lad  $I = \langle f_1, \dots, f_{21} \rangle$ . Når vi betragter  $T(I)$ , er det når masserne er givet (ellers ville  $T(I)$  ligge i  $\mathbb{R}^{10}$ ), så idealet  $I$  skal ses frembragt i  $\mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$ .

Følgende lemma er ret specifikt og udtaler sig kun om dette ideal  $I$ :

**Lemma 5.8.** *Lad  $\sigma \in Q$  og  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^6$ . For  $f \in \text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  gælder at  $f^{\tilde{\sigma}} \in \text{in}_{\sigma(\mathbf{a})}(I)$ .*

*Bevis.* Lad  $\alpha$  være et produkt af cyklerne (7, 8, 9, 10) og (7, 8) så vi får  $\tilde{\sigma} = \alpha\sigma$ . Vi viser først at  $I = I^{\tilde{\sigma}}$  hvor  $I^{\tilde{\sigma}} := \{h^{\tilde{\sigma}} : h \in I\}$ . Et  $h \in I$  kan ifølge (43) skrives  $h = \sum_{i=1}^{21} a_i f_i^{\tilde{\sigma}}$  hvor  $a_1, \dots, a_{21} \in \mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$ . Pr. lemma 4.28(1) må:

$$h = \sum_{i=1}^{21} a_i (f_i^{\sigma})^{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^{21} a_i f_i^{\sigma} \right)^{\alpha} = \left( \sum_{i=1}^{21} a_i^{\sigma^{-1}} f_i \right)^{\tilde{\sigma}}$$

Så  $h \in I^{\tilde{\sigma}}$ . Omvendt kan et vilkårligt polynomie i  $I^{\tilde{\sigma}}$  skrives  $h^{\tilde{\sigma}}$  for et  $h = \sum_{i=1}^{21} a_i f_i \in I$ , og så følger på samme måde at  $h^{\tilde{\sigma}} = \sum_{i=1}^{21} a_i^{\sigma} f_i^{\tilde{\sigma}} \in I$  vha. (43).

Vi kan skrive  $f = s_1 \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + s_n \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n)$  for nogle  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$  og  $g_1, \dots, g_n \in I$ . Lemma 4.28(1) og (3) giver nu anden og tredje lighed:

$$\begin{aligned}f^{\sigma} &= (s_1 \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1) + \dots + s_n \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n))^{\sigma} \\ &= s_1^{\sigma} \text{in}_{\mathbf{a}}(g_1)^{\sigma} + \dots + s_n^{\sigma} \text{in}_{\mathbf{a}}(g_n)^{\sigma} \\ &= s_1^{\sigma} \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_1^{\sigma}) + \dots + s_n^{\sigma} \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_n^{\sigma})\end{aligned}$$

Vi mangler at bytte om på masserne. Først fjernes alle de led  $s_i \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_i^{\sigma})$ ,  $i = 1, \dots, n$  hvor en ombytning af masserne vil få  $\text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_i^{\sigma})$  til at forsvinde. For de resterende led gælder  $(\text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_i^{\sigma}))^{\alpha} = \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}((g_i^{\sigma})^{\alpha})$ . Dvs:

$$f^{\tilde{\sigma}} = s_1^{\sigma} \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_1^{\tilde{\sigma}}) + \dots + s_m^{\sigma} \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_m^{\tilde{\sigma}})$$

Da alle  $\text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(g_k^{\tilde{\sigma}})$ ,  $k = 1, \dots, m$  er frembringere i  $\text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(I^{\tilde{\sigma}})$  må  $f^{\tilde{\sigma}} \in \text{in}_{\sigma\mathbf{a}}(I^{\tilde{\sigma}})$ , og da  $I = I^{\tilde{\sigma}}$  er bevist slut.  $\square$

### 5.3 Tjek at led ikke forsvinder

`gfan` er et stykke software der kan beregne tropiske variteter med mere. Ved at give programmet argumenterne `_nbody -N 4 --masses` fås de usymmetriske AC-polynomier. Medtager vi også argumentet `--symmetric` fås i stedet de symmetriske polynomier. Ligeledes vil `gfan` med argumentet `--dziobek` give Dziobeks polynomier.

Lad  $f_1, f_2, \dots, f_{21}$  være ACs symmetriske og usymmetriske polynomier samt Dziobeks polynomier, ligesom i sidste afsnit. Vi får<sup>14</sup> følgende udtryk for  $f_1$ :

$$\begin{aligned} f_1 = & -2(m_2 + m_1)r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + m_3 r_{12} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{24}^3 - m_3 r_{12} r_{13}^2 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 \\ & + m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^5 - m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^2 r_{23}^3 r_{24}^3 - m_3 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^2 r_{24}^3 \\ & - m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^2 + m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^5 r_{23}^3 + m_3 r_{12} r_{13}^5 r_{14}^3 r_{24}^3 - m_3 r_{12}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 \\ & - m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - m_3 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{24}^3 - m_4 r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 \\ & + 2(m_4 + m_3 + m_2 + m_1)r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 \end{aligned}$$

Så længe masserne er positive vil intet led herover forsvinde. Hvis vi er givet en konfiguration med konkrete masser  $m_1, \dots, m_4$ , kan vi se  $f_1$  som et polynomie i  $\mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$ . Og da  $T(f_1)$  er ligeglad med koefficienterne (så længe de ikke er 0) må  $T(f_1) = T(g_1)$  hvor:

$$\begin{aligned} g_1 = & -4r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + r_{12} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{24}^3 - r_{12} r_{13}^2 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 + r_{12} r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^5 - r_{12} r_{13}^3 r_{14}^2 r_{23}^3 r_{24}^3 \\ & - r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^2 r_{24}^3 - r_{12} r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^2 + r_{12} r_{13}^3 r_{14}^5 r_{23}^3 + r_{12} r_{13}^5 r_{14}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 \\ & - r_{12}^3 r_{13}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{24}^3 - r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 + 8r_{12}^3 r_{13}^3 r_{14}^3 r_{23}^3 r_{24}^3 \end{aligned}$$

Denne, og de 20 andre masseløse polynomier  $g_2, g_3, \dots, g_{21}$  kan vi give til `gfan` der beregner en polyhedralvifte  $\Sigma$  som i proposition 4.25. Om denne polyhedralvifte  $\Sigma$  gælder altså:

$$\text{supp}(\Sigma) = T(g_1) \cap T(g_2) \cap \dots \cap T(g_{21}) = T(f_1) \cap T(f_2) \cap \dots \cap T(f_{21})$$

### 5.4 Den tropiske prevarietet for frembringerne

`gfan` kan som sagt beregne en polyhedralvifte  $\Sigma$ , der opfylder punkterne i proposition 4.25 for polynomierne  $g_1, g_2, \dots, g_{21}$ . Der findes en del symmetri i prevarietetet for disse polynomier, som vi så i kapitel 5.1's note 5.7. Med de to frembringere for  $Q$  vil `gfan` også beregne banerne<sup>15</sup>, som  $Q$  giver anledning til. Fra `gfan`'s output kan vi aflæse en kegle-repræsentant fra hver

<sup>14</sup>Ved hjælp af software, se appendix B.1

<sup>15</sup>En bane er en delmængde  $B \subset \Sigma$  og for hver to kegler i en bane,  $P, P' \in B$ , gælder, at  $P' = \sigma(P) = \{\sigma(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in P\}$  for en permutation  $\sigma \in Q$ .



bane (se appendix C). Vi får den 0-dimensionelle kegle  $\{0\}$  samt følgende bane-repræsentanter (se proposition 4.21 for at opfriske hvad  $\text{cone}(\cdot)$  er):

$$\begin{array}{c} \text{cone}(\mathbf{s}_0), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_1), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_5), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_8), \\ \text{cone}(\mathbf{s}_{20}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{23}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{27}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{31}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{35}) \\ \hline \text{cone}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{27}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27}), \\ \text{cone}(\mathbf{s}_{27}, \mathbf{s}_{31}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_5, \mathbf{s}_{35}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{20}, \mathbf{s}_{35}) \\ \hline \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27}) \end{array}$$

Her er  $\mathbf{s}_i$ 'erne strålerne givet ved:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{s}_0 = (-1, -1, -1, -1, -1, -1) & \mathbf{s}_1 = (-1, -1, 0, -1, 0, 0) \\ \mathbf{s}_5 = (0, 0, 1, 1, 0, 0) & \mathbf{s}_8 = (-2, -2, 0, -2, 1, 1) \\ \mathbf{s}_{20} = (0, 1, 1, 1, 1, 0) & \mathbf{s}_{23} = (0, 0, 0, 1, 1, 1) \\ \mathbf{s}_{27} = (-2, -2, 1, -2, 1, 1) & \mathbf{s}_{31} = (0, 0, 1, 0, 1, 1) \\ \mathbf{s}_{35} = (0, 2, 3, 3, 2, 0) & \end{array}$$

For hver keglerepræsentant  $P$  fra ovenstående liste vil vi prøve at vise, at det relativt indre af  $P$  snittet med  $T(I)$  er tomt. Herefter vil vi argumentere for, at der heller ikke findes et  $P'$  fra  $P$ -banen, sådan at  $(P')^0$  snitter tomt med  $T(I)$ . Lykkedes dette fjerner vi  $P$  fra ovenstående liste. Hvis alle kegler fra listen på denne måde bliver fjernet, har vi vist, at det relativt indre af enhver kegle  $P \in \Sigma \setminus \{\{0\}\}$  snitter tomt med  $T(I)$ .

## 5.5 Kegler i $H_{-\mathbf{L}}^<$

Vi lader  $\mathbf{L} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^T \in \mathbb{R}^6$  og minder om det åbne halvplan defineret af  $-\mathbf{L}$  ved  $H_{-\mathbf{L}}^< = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : -\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} < 0\}$ . Lad  $P$  være en kegle fra førnævnte prevarietet som snitter ikke-tomt med  $H_{-\mathbf{L}}^<$ , dvs. en af følgende:

$$\begin{array}{c} \text{cone}(\mathbf{s}_5), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{20}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{23}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{31}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{35}) \\ \hline \text{cone}(\mathbf{s}_{27}, \mathbf{s}_{31}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_5, \mathbf{s}_{35}), \quad \text{cone}(\mathbf{s}_{20}, \mathbf{s}_{35}) \end{array}$$

Vi vil vise at  $P^0 \cap T(I) = \emptyset$ . Dvs. for vilkårligt  $\mathbf{a} \in P^0$  skal det vises at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  indeholder et monomie<sup>16</sup>. Der gælder at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I) \supset \langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$  så vi kan i stedet vise at sidstnævnte ideal indeholder et monomie. Pr. proposition 4.25 er  $\langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$  uafhængig af hvilket  $\mathbf{a}$  der vælges i  $P^0$ , så det er nok at vise, at dette ideal indeholder et monomie for ét  $\mathbf{a} \in P^0$ .

<sup>16</sup>For i så fald findes et  $h \in I$  så  $\text{in}_{\mathbf{a}}(h)$  er et monomie, og så er  $\mathbf{a} \notin T(h) \supset T(I)$ .

Lad os eksempelvis betragte keglen  $P = \text{cone}(\mathbf{s}_5)$  med repræsentanten  $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$ . Vi skal vise at  $J = \langle \text{in}_{\mathbf{a}}(f_1), \text{in}_{\mathbf{a}}(f_2), \dots, \text{in}_{\mathbf{a}}(f_{21}) \rangle$  indeholder et monomie. Vi har at:

$$\text{in}_{\mathbf{a}}(f_1) = m_4 r_{12} r_{13}^3 r_{14}^5 r_{23}^3 + m_3 r_{12} r_{14}^3 r_{23}^5 r_{24}^3$$

Lad  $p_1$  være det største monomie som deler alle led heri, dvs.  $p_1 = r_{12} r_{14}^3 r_{23}^3$ . Vi deler  $\text{in}_{\mathbf{a}}(f_1)$  med  $p_1$  og kalder resultatet  $h_1$ :

$$h_1 := m_4 r_{13}^3 r_{14}^2 + m_3 r_{23}^2 r_{24}^3$$

På samme måde fås<sup>17</sup>  $h_2, h_3, \dots, h_{21}$ . Vi får således et ideal  $K = \langle h_1, \dots, h_{21} \rangle$ . Lad nu  $p$  være et monomie så stort, at  $p_i | p$  for alle  $i = 1, \dots, 21$ . Så gælder for ethvert  $h \in K$  at  $ph \in J$ , så hvis  $K$  indeholder et monomie er der også et i  $J$ . Målet har nu ændret sig til at vise at  $K$  indeholder et monomie.

Vi finder nu kvotientidealet  $(K : (r_{12} r_{13} r_{14} r_{23} r_{24} r_{34})^\infty)$  med softwarepakken **Singular**. Kvotientidealet er simpelt nok til, at det kan snittes med delringen  $\mathbb{R}[m_1, m_2, m_3, m_4]$ . I dette tilfælde finder vi  $m_2 m_3 - m_1 m_4$  i kvotientidealet. Dette er ikke godt, da dette kan være 0 for positive masser. Lad os i stedet regne på keglen  $\text{cone}(\mathbf{s}_{35})$ . Med samme fremgangsmåde som ovenover finder vi nu  $m_1 + m_2$  i kvotientidealet, dvs.  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  indeholder  $(m_1 + m_2)P$  for et monomie  $P$ .

Da  $m_1 + m_2 \neq 0$  kan vi bruge lemma 5.8, dvs. der for alle  $\sigma \in Q$  gælder at  $(m_1 + m_2)^{\tilde{\sigma}} P^{\tilde{\sigma}} \in \text{in}_{\sigma(\mathbf{a})}(I)$ . At bruge  $\tilde{\sigma}$  på  $(m_1 + m_2)$  svarer blot til at bytte om på nogle af masserne, så  $(m_1 + m_2)^{\tilde{\sigma}}$  bliver aldrig nul. Når vi sætter konkrete masser ind bliver  $(m_1 + m_2)^{\tilde{\sigma}} P^{\tilde{\sigma}}$  således til et monomie i  $\mathbb{R}[r_{12}, \dots, r_{34}]$ , og dermed indeholder  $\text{in}_{\sigma(\mathbf{a})}(I)$  et monomie. Dette viser, at  $\sigma(\mathbf{a}) \notin T(I)$  for alle  $\sigma \in Q$  og  $\mathbf{a} \in P^0$ , dvs. det indre til enhver kegle i banen for  $\text{cone}(\mathbf{s}_{35})$  er ikke indeholdt i den tropiske varietet:  $(\sigma(P))^0 = \sigma(P^0) \cap T(I) = \emptyset$ .

Med undtagelse af keglerne  $\text{cone}(\mathbf{s}_5)$  og  $\text{cone}(\mathbf{s}_{20})$  virker denne metode på alle keglerne fra listen. Vi ser lidt nærmere på  $\text{cone}(\mathbf{s}_5)$  og  $\text{cone}(\mathbf{s}_{20})$  i kapitel 5.7.

---

<sup>17</sup>Ved hjælp af software, se appendix B.2

## 5.6 Kegler i $H_{\mathbf{L}}^<$

Det antages i dette afsnit at vi har fået fjernet keglene fra forrige afsnit, dvs. keglelisten er skåret ned til følgende:

$$\frac{\text{cone}(\mathbf{s}_0), \text{cone}(\mathbf{s}_1), \text{cone}(\mathbf{s}_8), \text{cone}(\mathbf{s}_{27})}{\frac{\text{cone}(\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1), \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8), \text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_{27}), \text{cone}(\mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27})}{\text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27})}}$$

Ethvert relativt indre af disse kegler (samt ethvert relativt indre af keglene fra deres baner) snitter tomt med  $H_{-\mathbf{L}}^<$ , hvilket betyder at  $T(I) \cap H_{-\mathbf{L}}^< = \emptyset$ . Proposition 4.27 fortæller nu at  $T(I) \cap H_{\mathbf{L}}^< = \emptyset$ , hvilket fjerner ovenstående kegler. Vi får altså at  $T(I) \subset \{0\}$ , og så giver sætning 4.36 at  $V(I)$  kun indeholder endeligt mange punkter i  $\mathbb{R}^{*6}$ .

## 5.7 De svære kegler

Metoden beskrevet i kapitel 5.5 virker på alle kegler(repræsentanter) der snitter ikke-tomt med  $H_{-\mathbf{L}}^<$  med undtagelse af to:  $\text{cone}(\mathbf{s}_5)$  og  $\text{cone}(\mathbf{s}_{20})$ . For at metoden skal virke på  $\text{cone}(\mathbf{s}_5)$  skal der gælde at  $(m_2m_3 - m_1m_4)^\sigma \neq 0$  for alle  $\sigma \in Q$ . Vi husker at disse permutation blot svarer til at benytte (1234) og (12) på indicerne, så vi skal have at:

$$m_1m_2 \neq m_3m_4, \quad m_1m_3 \neq m_2m_4, \quad m_1m_4 \neq m_2m_3$$

Det er dog værre med  $\text{cone}(\mathbf{s}_{20})$ . Singular tager flere minutter om at finde kvotientidealet, og det er ikke særlig pænt. Med polynomisk division kan det tjekkes at følgende element findes i kvotientidealet:

$$(m_1 + m_2)^2(m_3 + m_4)^2(m_1^3 + m_2^3)(m_3^3 + m_4^3)R$$

Dette  $R$  er givet ved:

$$(m_1^3 - m_2^3)^2(m_3^3 - m_4^3)^2 + 4m_1^3m_2^3(m_3^3 - m_4^3)^2 + 4m_3^3m_4^3(m_1^3 - m_2^3)^2$$

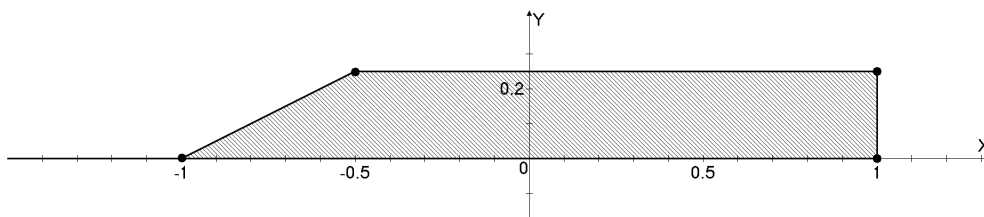
Et forsøg på at reparere dette er at begrænse os til at se på planare centrale konfigurationer, for så ved vi at en Cayley-Menger determinant skal være 0, og vi får et ekstra polynomie vi kan bruge i beregningerne. Det viser sig desværre at dette kun fjerner  $\text{cone}(\mathbf{s}_{23})$ . Denne kegle var ikke noget problem i forvejen, så dette bringer os ikke videre.

Derimod kunne man håbe at de nu større initiale idealer  $\text{in}_{\mathbf{s}_5}(I)$  og  $\text{in}_{\mathbf{s}_{20}}(I)$  giver anledning til andre kvotientideal. Skuffende finder vi dog, at kvotientidealet som  $\text{in}_{\mathbf{s}_5}(I)$  giver anledning til, snittet med  $\mathbb{R}[m_1, m_2, m_3, m_4]$ , giver os samme ideal som før,  $\langle m_2m_3 - m_1m_4 \rangle$ . Det samme gælder for  $\text{in}_{\mathbf{s}_{20}}(I)$ .

## 5.8 Sammenligning af tropiske prevarieteter

Artiklen [6] bruger Dziobeks- og Albouy-Chenciners symmetriske ligninger til at lave en tabel der forklarer retningen af hver stråle. For et  $\mathbf{a}$  i hver af disse stråler vises at  $\text{in}_{\mathbf{a}}(I)$  indeholder et monomie, og ligeså for  $\mathbf{a}$  i kegler udspændt af nogle af disse stråler. Så metoden vi har brugt minder meget om den i [6], selvom der her ikke bruges sproget fra tropisk geometri. Den tropiske prevarietet som der findes i [6] vil vi i dette afsnit kalde ‘prevarietet A’. Den tropiske prevarietet vi i dette kapitel har arbejdet med, hvor vi også har inkluderet de usymmetrisk Albouy-Chenciner polynomier, kalder vi ‘prevarietet B’.

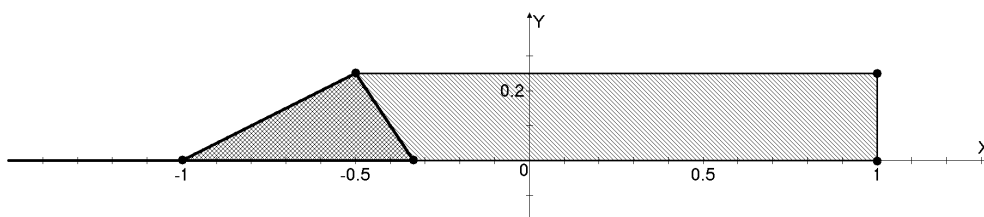
Prevarietet A indeholder én bane med tredimensionelle kegler. En repræsentant fra denne bane findes i rummet udspændt af de tre ortogonale vektorer  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $(0, 0, -2, 0, 1, 1)$  og  $(-1, -1, 1, -1, 1, 1)$ . Lad os kalde enhedsvektorerne i retning af disse for  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  og  $\mathbf{Z}$ . I figur 4 ses koordinatsystemet dannet af disse, hvis man forestiller sig  $\mathbf{Z}$  pege vinkelret ud af papiret mod læseren.



Figur 4: Et snit af en tredimensionel kegle fra prevarietet A

Denne firkant (inkl. det skraverede område) har  $\mathbf{Z}$ -koordinat 1, så man skal forestille sig denne svæve mellem papiret og læseren. Dette område er netop den tredimensionelle kegle snittet med planet  $\{\mathbf{x} \in \text{span}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) : \mathbf{x} \cdot \mathbf{Z} = 1\}$ , så man kan forestille sig denne kegle som alle stråler der udspringer fra origo og snitter ikke-tomt med firkanten. Denne kegle har fire todimensionelle kegler som sideflader og fire stråler som kanter, og disse er alle indeholdt i prevarietet A. Betragt nu strålen som er repræsenteret ved punktet  $(-1, 0, 1)$ . Denne og strålen i retning af  $-\mathbf{X}$  udspænder sammen en anden kegle i prevarietet A, som også snitter ovenstående plan. Dette er indtegnet som halvlinjen ovenpå  $\mathbf{X}$ -aksen til venstre for figuren.

Da prevarietet B er snittet af flere hyperflader end prevarietet A, er det ingen overraskelse at denne prevarietet er en delmængde af prevarietet A. Prevarietet B har dog stadig en tredimensionel kegle, som udgøres af strålerne gennem det dobbelt-skraverede område i figur 5. Denne mindre kegle er netop

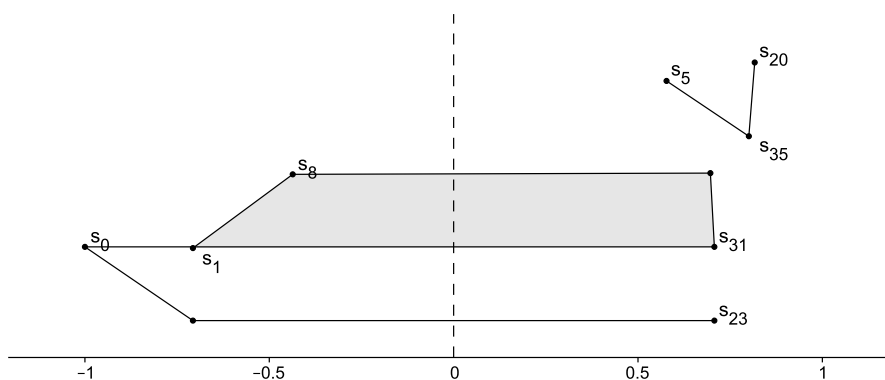


Figur 5: De tredimensionelle kegler fra prevarietet A og B

$\text{cone}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_8, \mathbf{s}_{27})$ . Den lille trekants hjørner repræsenterer (fra venstre mod højre)  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_8$  og  $\mathbf{s}_{27}$ .

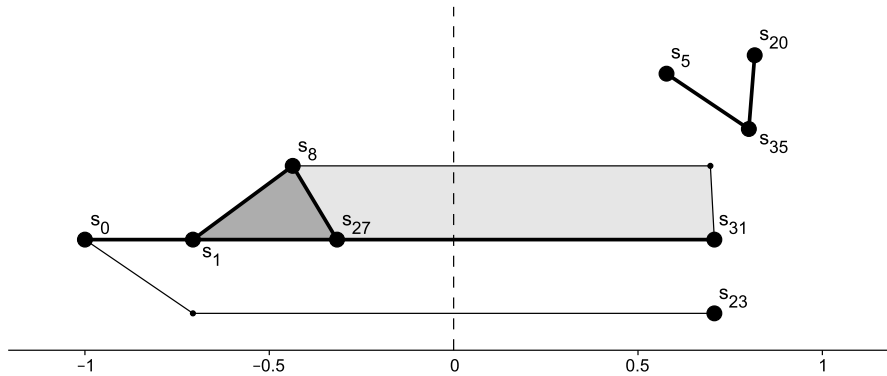
Vi kan ikke tegne alle repræsentanter fra prevarieteterne ind i samme tredimensionelle koordinatsystem. Vi kan dog stadig vise grafisk hvilke stråler de forskellige kegler har som kanter, som det ses på figur 6 og 7. Ligesom før repræsenterer hvert punkt en stråle, hvert linjestykke en todimensionel kegle og arealet en tredimensionel kegle.

Figur 6 illustrerer prevarietet A. Den nederste akse er cosinus til vinklen mellem den pågældende stråle og  $\mathbf{X}$ , så keglerne som er repræsenteret på den højre side af skillelinjen ligger i  $H_{\mathbf{X}}^<$ , og omvendt i  $H_{\mathbf{X}}^<$  for kegler på venstre side. Prevarietet B er en delmængde af prevarietet A, så vi kan markere denne herpå, se figur 7.



Figur 6: Alle kegler fra prevarietet A

Prevarietet B har (i forhold til prevarietet A) mistet to stråler, og fået en ny:  $\mathbf{s}_{27}$ . Vi noterer antallet af repræsentanter fra hver prevarietet i tabel 1. Tallet i parentes er antallet af kegler, som snitter ikke-tomt med  $H_{\mathbf{X}}^<$ .



Figur 7: Alle kegler fra prevarietet A og B

	prevarietet A	prevarietet B
Stråler	10 (6)	9 (5)
2-dim. kegler	9 (6)	7 (3)
3-dim. kegler	1 (1)	1 (0)

Tabel 1: Antallet af kegler i prevarietet A og B

Hvis vi kun betragter planare centrale konfigurationer ved vi, at Cayley-Menger determinanten skal være 0 for de seks afstande skal være 0, hvilket giver en ekstra ligning. Inkluderes denne forsvinder stråle  $s_{23}$  også fra prevarietet B. Men uanset hvad får vi altså ikke fjernet de svære stråler,  $s_5$  og  $s_{20}$ .

## 6 Litteratur

- [1] Anders Nedergaard Jensen: *Lecture Notes: Algebra and Polyhedral Geometry*, Maj 30, 2014.
- [2] Bernd Sturmfels: *Grobner Bases and Convex Polytopes*, American Mathematical Society, 1996.
- [3] [http://www.scholarpedia.org/article/Central\\_configurations#Self-Similar\\_Solutions](http://www.scholarpedia.org/article/Central_configurations#Self-Similar_Solutions)
- [4] David Cox, John Little, Donal O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, third edition, Springer 2007
- [5] F. R. Moulton: *The Straight Line Solutions of the Problem of  $n$  Bodies*, Ann. of Math. 12 (1910) 1-17.
- [6] Marshall Hampton og Richard Moeckel: *Finiteness of Relative Equilibria of the Four-Body Problem*, December 17, 2004.
- [7] Kevin Brown: *Simplex Volumes and the Cayley-Menger Determinant*, <http://www.mathpages.com/home/kmath664/kmath664.htm>
- [8] Diane Maclagan og Bernd Sturmfels: *Introduction to tropical geometry*. Bog under forberedelse.
- [9] Richard Moeckel: *On central configurations*, Mathematische Zeitschrift, vol. 205 (1990) 499-517.
- [10] Igor Pak: *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, April 20 2010, 364-365
- [11] Steven J. Leon *Linear Algebra with applications*, seventh edition, Pearson International Edition.

## A Appendix: Liste over egne bidrag

- Kapitel 1.1 og 1.2 er baseret på [6]. Mange ting er dog forsøgt opskrevet mere præcist, så beskrivelserne bliver lidt anderledes end i [6]. F.eks. beskrives relative ækvilibria ved  $\mathbf{y}_i(t) = Q_{\alpha t}(\mathbf{y}_i(0) - \mathbf{c}) + \mathbf{c}$ .
- Proposition 1.4, lemma 1.6, eksempel 1.2 og 1.5.
- Kapitel 1.3 og specielt definition 1.7 er udarbejdet ud fra hvad der står i [3] om homotetisk bevægelse.
- Ligeså er i kapitel 1.4 (og 2.4) præciseret hvornår konfigurationer er ækvivalente.
- Normerede konfigurationer og afbildningerne  $\Omega$  og  $\Omega'$  i kapitel 2.
- De fleste resultater fra kapitel 2.1 og 2.2 er taget fra [6], men opsat i lemmaer og en proposition, og rettet til så det passer i konteksten med ækvivalensrelationen  $\sim$ .
- ( $\Leftarrow$ )-implikationen i lemma 2.5.
- Kapitel 2.3 og 2.4
- Kapitel 3.1 er udarbejdet ud fra [7] og [10].
- Lemma 4.4 og lemma 4.7
- Beviserne til lemma 4.8, proposition 4.9 og korollar 4.10, men selve resultaterne var kendt fra [2].
- Eksempel 4.12 og lemma 4.14.
- Lemma 4.24, proposition 4.25 og lemma 4.28.
- Proposition 4.27, eksempel 4.30, proposition 4.34 og proposition 4.36 er udarbejdet med hjælp fra Anders Nedergaard Jensen.
- Beviset til proposition 4.38, men resultatet var kendt fra [2].
- Kapitel 5.1 og 5.2 er udarbejdet efter samtaler med Anders Nedergaard Jensen.
- Den overordnede fremgangsmåde i kapitel 5.4, 5.5 og kapitel 5.6 er fra [6], men med polyhedral- og tropisk geometri er resultaterne vist på en anden måde.
- Softwaren, som beskrives i appendix B.



## B Appendix: Diverse software

De fleste af beregningerne i kapitel 5 er udført af programmerne `gfan` og `Singular`. Der er dog nogle beregninger som er klaret af programmer der er skrevet til formålet. På <http://dansoy.dk/fourbody> kan en mappe hentes som bl.a. indeholder softwaren der beskrives i dette kapitel.

### B.1 Sæt variabler udenfor parentes

I kaptel 5.3 blev et program brugt til at sætte afstandene udenfor parenteser. Programmet får at vide hvad der er variabler (afstandene) og hvad der skal anses som konstanter (masserne). Hver input-streng bliver fortolket til et polynomie, men sidstnævnte bliver repræsenteret ved en afbildning  $\alpha$  der sender variabelernes eksponentvektorer  $\mathbf{u}$  til andre afbildninger  $\alpha_{\mathbf{u}}$ . Enhver afbildning på formen  $\alpha_{\mathbf{u}}$  sender eksponentvektorer  $\mathbf{v}$  for konstanterne til heltalskoefficienterne der passer til eksponentvektorerne  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$ .

Lad os se på et eksempel. Hvis programmet anser  $x_1$  og  $x_2$  som variable,  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$  som konstanter og får strengen  $2*x_1*a_1+3*x_1*a_1*a_3+4*x_1*x_2^2$ , så dannes en afbildning  $\alpha$  med definitions­mængde  $\{(1,0), (1,2)\}$ . Betragt først  $\alpha_{(1,0)}$  som har definitionsmængde  $\{(1,0,0), (1,0,1)\}$ . Disse bliver sendt til deres respektive koefficienter,  $\alpha_{(1,0)}(1,0,0) = 2$  og  $\alpha_{(1,0)}(1,0,1) = 3$ . Tilsvarende er definitionsmængden for  $\alpha_{(1,2)}$  blot  $\{(0,0,0)\}$  og der gælder  $\alpha_{(1,2)}(0,0,0) = 4$ .

Vi ser at  $2*x_1*a_1+3*x_1*a_1*a_3$  kan omskrives til  $(2*a_1+3*a_1*a_3)*x_1$ . Hele denne parentes bliver beskrevet af  $\alpha_{(1,0)}$ . På samme måde gælder mere generelt at  $\alpha_{\mathbf{u}}$  beskriver koefficienten foran variablerne der har eksponentvektor  $\mathbf{u}$ . Så for hvert  $\mathbf{u}$  fra  $\alpha$ 's definitionsmængde printes koefficienten beskrevet af  $\alpha_{\mathbf{u}}$  efterfulgt af variablerne med eksponentvektor  $\mathbf{u}$ . Herefter tilføjes et '+' og proceduren gentages for næste eksponentvektor  $\mathbf{u}$ . Resultatet bliver et polynomie hvor alle afstande er sat udenfor parenteser.

Tilhørende kode, makefile m.m. findes i `/factorize` i førnævnte mappe.

### B.2 Find initielle former

I kapitel 5.5 blev der brugt et program til at finde initielle former for polynomier mht. en vektor  $\mathbf{u}$ .

Programmet gives vektoren  $\mathbf{u}$  samt polynomierne som strenge. For hvert polynomie sker følgende: Først opbygges en afbildning  $\alpha$  der sender polynomiets eksponentvektorer til deres koefficienter. Herefter gennemgås  $\alpha$ 's definitionsmængde, for at finde polynomiets  $\mathbf{u}$ -grad. Efter dette fjernes alle elementer fra denne definitionsmængde som ikke har denne  $\mathbf{u}$ -grad. Resultatet

er at  $\alpha$  nu repræsenterer det  $\mathbf{u}$ -initielle polynomie.

Er der givet et valgfrit argument, `--reduce`, bliver polynomiet herefter delt igennem med det største monomie som går op i alle led (herved bliver resultaterne ikke de initielle former af polynomierne, men resultatet er stadig nyttigt hvis vi ønsker at vise at det initielle ideal indeholder et monomie). Til sidst printes polynomiet som  $\alpha$  repræsenterer ud, ved iterativt at printe  $\alpha(\mathbf{u})$  ud efterfulgt af variablerne med eksponentvektor  $\mathbf{u}$ .

Tilhørende kode, makefile m.m. findes i `/initialGen` i førnævnte mappe.

### B.3 Script til Singular

Singular bliver brugt mange gange til at finde et kvotientideal og snitte det med  $\mathbb{R}[m_1, m_2, m_3, m_4]$ , og hver gang skal et maskineri op at køre: Udover at definere en ring skal et ideal bestemmes i hvilket frembringerne er forskellige fra gang til gang, samt mere. For mange af keglerner i prevarieteteten blev denne proces automatiseret af et simpelt script.

I konteksten af kapitel 5 får scriptet frembringere for et delvist mættet ideal som input. Scriptet danner nu følgende linjer, som den sender til Singular (frembringerne skal substitueres ind ved stjernerne):

```
ring r=0, (m1,m2,m3,m4,r12,r13,r14,r23,r24,r34), dp;
ideal i = *****;
ideal i2 = sat(i,r12)[1];
ideal i3 = sat(i2,r13)[1];
ideal i4 = sat(i3,r14)[1];
ideal i5 = sat(i4,r23)[1];
ideal i6 = sat(i5,r24)[1];
ideal ie = sat(i6,r34)[1];
eliminate(ie,r12*r13*r14*r23*r24*r34);
```

Vi kunne i teorien finde det simple kvotientideal med kommandoen `ideal ie = sat(i, r12*r13*r14*r23*r24*r34)[1]`, men kørselstiden for denne kommando viser sig at være væsentligt længere end den samlede kørselstiden for at finde seks kvotientidealer mht. de forskellige afstande, så vi bruger i stedet `sat`-kommandoen seks gange. Sidste kommando, `eliminate` snitter kvotientidealet med masseringen  $\mathbb{R}[m_1, m_2, m_3, m_4]$ .

Scriptet hedder `newSI` og kan findes i den førnævnte mappe.

## C Appendix: Gfan's beregning af prevarietet

`gfan _tropicalintersection --symmetryPrinting` giver et output som herunder hvis vi giver programmet følgende standard input: Dziobeks polynomier, Albouy-Chenciners symmetriske og usymmetriske polynomier samt de to frembringere til permutationsgruppen  $Q$  der giver anledning til polyhedralviftens baner.

Disse beregninger kan nemt gentages på en computer ved at hente mappen fra <http://dansoy.dk/fourbody>, og køre scriptet `beregn_prevarietet` i mappen `/beregninger/2_beregn_prevarietet`.

```
LP algorithm being used: "cddgmp".
```

```
_application fan  
_version 2.2  
_type SymmetricFan
```

```
AMBIENT_DIM
```

```
6
```

```
DIM
```

```
3
```

```
LINEALITY_DIM
```

```
0
```

```
RAYS
```

```
-1 -1 -1 -1 -1 -1 # 0  
-1 -1 0 -1 0 0 # 1  
-1 0 -1 0 -1 0 # 2  
0 -1 -1 0 0 -1 # 3  
0 0 0 -1 -1 -1 # 4  
0 0 1 1 0 0 # 5  
0 1 0 0 1 0 # 6  
1 0 0 0 0 1 # 7  
-2 -2 0 -2 1 1 # 8  
-2 -2 1 -2 0 1 # 9  
-2 -2 1 -2 1 0 # 10  
-2 0 -2 1 -2 1 # 11  
-2 1 -2 0 -2 1 # 12  
-2 1 -2 1 -2 0 # 13  
0 -2 -2 1 1 -2 # 14
```

```
0 1 1 -2 -2 -2 # 15
1 -2 -2 0 1 -2 # 16
1 -2 -2 1 0 -2 # 17
1 0 1 -2 -2 -2 # 18
1 1 0 -2 -2 -2 # 19
0 1 1 1 1 0 # 20
1 0 1 1 0 1 # 21
1 1 0 0 1 1 # 22
0 0 0 1 1 1 # 23
0 1 1 0 0 1 # 24
1 0 1 0 1 0 # 25
1 1 0 1 0 0 # 26
-2 -2 1 -2 1 1 # 27
-2 1 -2 1 -2 1 # 28
1 -2 -2 1 1 -2 # 29
1 1 1 -2 -2 -2 # 30
0 0 1 0 1 1 # 31
0 1 0 1 0 1 # 32
1 0 0 1 1 0 # 33
1 1 1 0 0 0 # 34
0 2 3 3 2 0 # 35
0 3 2 2 3 0 # 36
2 0 3 3 0 2 # 37
2 3 0 0 3 2 # 38
3 0 2 2 0 3 # 39
3 2 0 0 2 3 # 40
```

```
-----
(ikke-relevant output er fjernet)
-----
```

CONES

```
{ } # New orbit # Dimension 0
{0} # New orbit # Dimension 1
{1} # New orbit
{2}
{3}
{4}
{5} # New orbit
{6}
{7}
```

{8} # New orbit  
{9}  
{10}  
{11}  
{12}  
{13}  
{14}  
{15}  
{16}  
{17}  
{18}  
{19}  
{20} # New orbit  
{21}  
{22}  
{23} # New orbit  
{24}  
{25}  
{26}  
{27} # New orbit  
{28}  
{29}  
{30}  
{31} # New orbit  
{32}  
{33}  
{34}  
{35} # New orbit  
{36}  
{37}  
{38}  
{39}  
{40}  
{0 1} # New orbit # Dimension 2  
{0 2}  
{0 3}  
{0 4}  
{1 8} # New orbit  
{1 9}  
{1 10}  
{2 11}

{2 12}  
{2 13}  
{3 14}  
{3 16}  
{3 17}  
{4 15}  
{4 18}  
{4 19}  
{1 27} # New orbit  
{2 28}  
{3 29}  
{4 30}  
{8 27} # New orbit  
{9 27}  
{10 27}  
{11 28}  
{12 28}  
{13 28}  
{14 29}  
{15 30}  
{16 29}  
{17 29}  
{18 30}  
{19 30}  
{27 31} # New orbit  
{28 32}  
{29 33}  
{30 34}  
{5 35} # New orbit  
{5 37}  
{6 36}  
{6 38}  
{7 39}  
{7 40}  
{20 35} # New orbit  
{20 36}  
{21 37}  
{21 39}  
{22 38}  
{22 40}  
{1 8 27} # New orbit # Dimension 3

{1 9 27}  
{1 10 27}  
{2 11 28}  
{2 12 28}  
{2 13 28}  
{3 14 29}  
{3 16 29}  
{3 17 29}  
{4 15 30}  
{4 18 30}  
{4 19 30}

-----  
(ikke-relevant output er fjernet)  
-----